

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ МИХАЙЛА ОСТРОГРАДСЬКОГО
ІНСТИТУТ ЕЛЕКТРОМЕХАНІКИ, ЕНЕРГОЗБЕРЕЖЕННЯ
І СИСТЕМ УПРАВЛІННЯ



МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ЩОДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ
З НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ
«МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ»
ДЛЯ СТУДЕНТІВ ДЕННОЇ ТА ЗАОЧНОЇ ФОРМИ НАВЧАННЯ
СПЕЦІАЛЬНОСТІ 141 – «ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИКА, ЕЛЕКТРОТЕХНІКА ТА
ЕЛЕКТРОМЕХАНІКА»
(У ТОМУ ЧИСЛІ СКОРОЧЕНИЙ ТЕРМІН НАВЧАННЯ)

КРЕМЕНЧУК 2017

Методичні вказівки щодо практичних занять з навчальної дисципліни «Математичні методи моделювання» для студентів денної та заочної форми навчання спеціальності 141 – «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» (у тому числі скорочений термін навчання)

Укладачі: старш. викл. О. А. Хребтова,
асист. В. Г. Ковальчук

Рецензент к. т. н., доц. Ю. В. Зачепа

Кафедра систем автоматизованого управління та електропривода

Затверджено методичною радою Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського

Протокол № «___» від «___» _____ 2017 р.

Голова методичної ради _____ проф. В. В. Костін

ЗМІСТ

Вступ	4
1 Перелік практичних занять.....	6
Практичне заняття № 1 Математичні методи оброблення експериментальних даних.....	6
Практичне заняття № 2 Розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь	20
Практичне заняття № 3 Методи розв’язання нелінійних рівнянь. Числові методи розв’язання диференціальних рівнянь і їх систем ...	37
Практичне заняття № 4 Чисельне обчислення визначних інтегралів.....	51
Практичне заняття № 5 Наближене вирішення диференціальних рівнянь і їх систем.....	61
2 Критерії оцінювання знань студентів.....	71
Список літератури.....	72
Додаток А Значення експериментальних вимірювань	73
Додаток Б Коефіцієнти і вільні члени СЛАР	75
Додаток В Вихідні дані для розв’язання задачі Коші.....	77
Додаток Г Зразок оформлення титульної сторінки.....	79

ВСТУП

Навчальна дисципліна «Математичні методи моделювання» покладена в основу всіх навчальних дисциплін, у яких застосовуються математичні методи для автоматизації математичної обробки даних, побудови алгоритмів основних числових методів і їх реалізації в математичних пакетах спеціального та загального призначення, а також для проектування, моделювання та дослідження електромеханічних систем.

Метою проведення практичних робіт є закріплення студентами знань, отриманих на лекціях, та оволодіння навичками застосування математичних методів моделювання, необхідних для: розв'язування лінійних, нелінійних рівнянь і їх систем; проведення інтерполяції та апроксимації таблично заданих функцій; обчислення визначених інтегралів; розв'язування диференціальних рівнянь і їх систем; виконання самостійних робіт з навчальної дисципліни «Математичні методи моделювання»; виконання розрахункових робіт з навчальної дисципліни «Математичні методи моделювання».

Міждисциплінарні зв'язки: «Фізика», «Вища математика», «Комп'ютерні технології та програмування», «Теоретичні основи електротехніки», забезпечує засвоєння навчальних курсів – «Теорія автоматичного керування», «Моделювання електромеханічних систем», «Системи керування електроприводами» тощо.

Згідно з вимогами освітньо-професійної програми студенти повинні

знати:

- основні числові методи та особливості їх застосування;

уміти:

- вибирати та обґрунтовувати використання на практиці числових методів стійких до похибок і найбільш ефективних під час їх практичної реалізації на ЕОМ;
- досліджувати обчислювальні алгоритми, виявляти їх переваги та недоліки;

– вибирати оптимальні алгоритми розв’язання науково-технічних задач, використовуючи для цього різноманітні пакети програм математичної обробки даних спеціального та загального використання.

Методичні вказівки містять теоретичні відомості, завдання для розв’язування, приклади виконання завдань і контрольні питання для підготовки з тем: розв’язування систем лінійних рівнянь, нелінійних рівнянь і їх систем, інтерполяції функцій.

Звіт з практичного заняття повинен містити:

1. Титульну сторінку.
2. Тему, мету роботи, лістинг проведених розрахунків з поясненнями.
3. Висновки.

1 ПЕРЕЛІК ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

Практичне заняття № 1

Тема. Математичні методи оброблення експериментальних даних

Мета: набуття навичок оброблення експериментальних даних та оцінювання похибок вимірювання.

Короткі теоретичні відомості

Перш ніж говорити про те, як здійснюють експериментальне дослідження, необхідно мати уявлення, що таке експеримент, які його особливості [1, 3].

Експеримент – метод емпіричного пізнання, що припускає активну, цілеспрямовану і строго контрольовану дію дослідника на об'єкт, що вивчають, для виявлення і вивчення тих або інших сторін, властивостей, зв'язків [1, 3].

Підготовка і проведення експерименту вимагають дотримання ряду умов.

Так, **науковий експеримент:**

- ніколи не ставлять навмання, він припускає наявність чітко сформульованої мети дослідження;
- не роблять «наосліп», він завжди базується на якихось початкових теоретичних положеннях. Без ідеї в голові взагалі не побачиш факту;
- не проводять безпланово, хаотично, заздалегідь дослідник намічає шляхи його проведення;
- він вимагає певного рівня розвитку технічних засобів пізнання, необхідного для його реалізації;
- він має проводитися людьми, які мають достатньо високу кваліфікацію.

Тільки сукупність усіх цих умов визначає успіх в експериментальних дослідженнях. Залежно від характеру проблем, розв'язуваних у ході експериментів, останні звичайно підрозділяють на дослідницькі й перевірочні [1, 3].

Дослідницькі експерименти дають можливість знайти в об'єкті нові, невідомі властивості.

Перевірочні експерименти слугують для перевірки, підтвердження тих або інших теоретичних положень.

З урахуванням методики проведення й отримання результатів, експерименти можна розділити на якісні та кількісні [1, 3].

Якісні експерименти мають пошуковий характер і не приводять до отримання яких-небудь кількісних співвідношень. Вони дозволяють лише виявити дію тих або інших чинників на явище, що вивчають.

Кількісні експерименти направлені на встановлення точної кількісної залежності в досліджуваному явищі.

У реальній практиці експериментального дослідження обидва вказані типи експериментів реалізують, як правило, у вигляді послідовних етапів розвитку пізнання. Ці експерименти мають прикладне та соціально-економічне значення [1, 3].

Експеримент зовсім не обмежується лише проведенням досліду та отриманням початкової інформації, а складається з етапів, на кожному з яких по-своєму поєднуються елементи фізичного, практичного і теоретичного пізнання:

1) підготовчий етап (пошук та оброблення інформації щодо необхідної теми; перевірку результатів наукових робіт, які ведуть у даному напрямку; оброблення всіх теоретичних відомостей відносно даної теми; теоретичні відомості, необхідні для проведення аналізу та перерахунку; визначення елементної бази для проведення експерименту; перевірку датчиків на придатність для отримання експериментальних значень);

2) етап проведення експерименту та отримання дослідних даних;

3) етап оброблення дослідних даних, або заключний (обробка даних з використанням відомих математичних методів; верифікація результатів; за необхідності перерахунок іншими методами).

Особливе місце в експериментальних дослідженнях займають математичне оброблення результатів розрахунку і вимірювань, а також побудова математичних моделей предмета пізнання, що відіграють важливу роль у наукових дослідженнях.

Аналіз похибок дослідних даних, отриманих у результаті проведення експерименту, ґрунтується на теорії випадкових помилок, що дає можливість з певною гарантією обчислити дійсне значення вимірюваної величини та оцінити можливі похибки. Теорія випадкових похибок дозволяє оцінити точність і надійність вимірювання за певної кількості вимірів або визначити мінімальну кількість вимірів, що гарантує необхідну точність і надійність вимірювань. Разом з цим виникає необхідність виключити грубі помилки ряду, визначити вірогідність отриманих даних та ін.

Оцінювання експериментальних даних за допомогою довірчої ймовірності

Для великої вибірки і нормального закону розподілу загальною оцінною характеристикою вимірювання є дисперсія D , що характеризує однорідність вимірювання та коефіцієнт варіації K_v , що визначає змінність вимірів відносно середньоарифметичних значень

$$D = \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}, \quad (1.1)$$

$$K_v = \frac{\sigma}{\bar{x}}, \quad (1.2)$$

де σ – середньоквадратичне відхилення; x_i – експериментальне значення ряду; \bar{x} – середньоарифметичне експериментальне значення ряду; n – кількість експериментальних даних.

Довірча ймовірності:

$$p_D = p[a \leq x_D \leq b] = \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{b - \bar{x}}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \bar{x}}{\sigma}\right) \right], \quad (1.3)$$

де α , b – нижнє та верхнє значення межі ймовірності; $\varphi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ –

інтегральна функція Лапласа (табл. 1.1).

Таблиця 1.1 – Інтегральна функція Лапласа

T	p_d	t	p_d	t	p_d
0,00	0,0000	0,75	0,5467	1,50	0,8664
0,05	0,0399	0,80	0,5763	1,55	0,8789
0,10	0,0797	0,85	0,6047	1,60	0,8904
0,15	0,1192	0,90	0,6319	1,65	0,9011
0,20	0,1585	0,95	0,6579	1,70	0,9109
0,25	0,1974	1,00	0,6827	1,75	0,9199
0,30	0,2357	1,05	0,7063	1,80	0,9281
0,35	0,2737	1,10	0,7287	1,85	0,9357
0,40	0,3108	1,15	0,7419	1,90	0,9426
0,45	0,3473	1,20	0,7699	1,95	0,9488
0,50	0,3829	1,25	0,7887	2,00	0,9545
0,55	0,4177	1,30	0,8064	2,25	0,9756
0,60	0,4515	1,35	0,8230	2,50	0,9876
0,65	0,4843	1,40	0,8385	3,00	0,9973
0,70	0,5161	1,45	0,8529	4,00	0,9999

Аргументом функції $\varphi(t)$ є гарантійний коефіцієнт:

$$t = \frac{\mu}{\sigma}, \quad (1.4)$$

де $\mu = b - \bar{x}$; $\mu = -(a - \bar{x})$, де μ – значення половини довірчого інтервалу.

Довірчий інтервал 2μ характеризує точність вимірювання даної вибірки, а довірна ймовірність p_d – вірогідність вимірювання. Половина довірчого інтервалу μ дорівнює:

$$\mu = \sigma \operatorname{arg}(p_d) = \sigma t, \quad (1.5)$$

де $\operatorname{arg}(p_d)$ – аргумент функції Лапласа (при $n < 30$) або функції Ст'юдента (при $n > 30$) [7].

Визначення мінімальної кількості вимірювань

Для проведення дослідів із заданою точністю і вірогідністю необхідно знати ту кількість вимірювань, за якою експериментатор упевнений у позитивному виході. Задача зводиться до встановлення мінімального обсягу вибірки (числа вимірювань) N_{\min} із заданими значеннями довірчого інтервалу 2μ і довірчої ймовірності. Під час виконання вимірювань необхідно визначити точність:

$$\Delta = \frac{\sigma_0}{x}, \quad (1.6)$$

де $\sigma_0 = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ – середньоарифметичне значення середньоквадратичного відхилення σ .

Значення σ_0 часто називають **середньою похибкою**. Довірчий інтервал помилки вимірювання Δ визначають аналогічно для вимірювань $\mu = t\sigma_0$. За допомогою t легко визначити довірчу ймовірність помилки вимірювань (табл. 1.1) [7].

У дослідженнях часто за заданою точністю Δ і довірчою ймовірністю вимірювання визначають мінімальну кількість вимірювань N_{\min} , що гарантують необхідні значення Δ і p_d :

$$N_{\min} = \frac{\sigma^2 t^2}{\sigma_0^2} = \frac{k_v^2 t^2}{\Delta^2}, \quad (1.7)$$

де k_v – коефіцієнт варіації (мінливості), %; Δ – точність вимірювань, %.

Для визначення N_{\min} беруть таку послідовність обчислень:

1) проводять попередній експеримент з кількістю вимірювань $n = 20 \div 50$;

2) обчислюють середньоквадратичне відхилення σ ;

3) відповідно до поставлених завдань експерименту встановлюють необхідну точність вимірювань Δ , що не має перевищувати точність приладу;

4) установлюють нормоване відхилення t , значення якого звичайно задається (залежить також від точності методу);

5) визначають N_{\min} і тоді надалі в процесі експерименту число вимірювань не має бути менше ніж N_{\min} .

Оцінки вимірювань за допомогою σ і σ_0 за наведеними методами справедливі при $n > 30$.

Для знаходження межі довірчого інтервалу за малих значень застосовують такий метод.

Для малої вибірки довірчий інтервал:

$$\mu_{cm} = \sigma_0 \alpha_{cm}, \quad (1.8)$$

де α_{cm} – коефіцієнт Ст'юдента, що беруть за табл. 1.2 залежно від значення довірчої ймовірності p_d . [7].

Таблиця 1.2 – Коефіцієнт Ст'юдента α_{ct}

N	P _d					
	0,80	0,90	0,95	0,99	0,995	0,999
10	1,383	1,83	2,26	3,25	3,69	4,78
12	1,363	1,80	2,20	3,11	3,50	4,49
14	1,350	1,77	2,16	3,01	3,37	4,22
16	1,341	1,75	2,13	2,95	3,29	4,07
18	1,333	1,74	2,11	2,90	3,22	3,96
20	1,328	1,73	2,09	2,86	3,17	3,88
30	1,310	1,70	2,04	2,75	3,20	3,65
40	1,306	1,68	2,02	2,70	3,12	3,55
50	1,298	1,68	2,01	2,68	3,09	3,50

Продовження табл. 1.2

N	P _d					
	0,80	0,90	0,95	0,99	0,995	0,999
60	1,290	1,67	2,00	2,66	3,06	3,46
∞	1,282	1,64	1,96	2,58	2,81	3,29

n – кількість паралельних серій дослідів.

Знаючи μ_{cm} , можна обчислити дійсне значення величини, що визначають, для малої вибірки:

$$x_{\partial} = \bar{x} \pm \mu_{cm}. \quad (1.9)$$

Перевірка наявності грубих помилок ряду

У процесі оброблення експериментальних даних потрібно виключити грубі помилки ряду. Поява цих помилок цілком імовірна, а наявність їх відчутно впливає на результат вимірювання. Відомо декілька методів визначення грубих помилок статистичного ряду [7].

Найпростішим способом виключення з ряду вимірювання, що різко виділяється, є **правило трьох сигм**: розкидання випадкових величин від середнього значення не має перевищувати значення трьох середньоквадратичних відхилень $x_{max, min} = \bar{x} \pm 3\sigma$.

Більш вірогідними є методи, що базуються на використанні довірчого інтервалу.

Є статистичний ряд малої вибірки, що підкорюється закону нормального розподілу. За наявності грубих помилок критерії їх появи обчислюють за формулами:

$$\beta_1 = \frac{(x_{max} - \bar{x})}{\sigma \sqrt{\frac{n-1}{n}}}; \quad \beta_2 = \frac{(\bar{x} - x_{min})}{\sigma \sqrt{\frac{n-1}{n}}}, \quad (1.10)$$

де x_{max} , x_{min} – найбільше і найменше значення з n вимірювань.

У табл. 1.3 наведено максимальні значення β_{\max} , що виникають унаслідок статистичного розкиду, залежно від довірчої ймовірності p_d .

Таблиця 1.3 – Критерій появи грубих похибок β_{\max}

n	β_{\max} при p_d			n	β_{\max} при p_d		
	0,90	0,95	0,99		0,90	0,95	0,99
3	1,41	1,41	1,41	15	2,33	2,49	2,80
4	1,64	1,69	1,72	16	2,35	2,52	2,84
5	1,79	1,87	1,96	17	2,38	2,55	2,87
6	1,89	2,00	2,13	18	2,40	2,58	2,90
7	1,97	2,09	2,26	19	2,43	2,60	2,93
8	3,04	2,17	2,37	20	2,45	2,62	2,96
9	2,10	2,24	2,46	25	2,54	2,72	3,07
10	2,15	2,29	2,54	30	2,61	2,79	3,16
11	2,19	2,34	2,61	35	2,67	2,85	3,22
12	2,23	2,39	2,66	40	2,72	2,90	3,28
13	2,26	2,43	2,71	45	2,76	2,95	3,33
14	2,30	2,46	2,76	50	2,80	2,99	3,37

Якщо $\beta_1 > \beta_{\max}$, то значення x_{\max} необхідно виключити з ряду як грубу похибку; при $\beta_2 > \beta_{\min}$ – виключається величина x_{\min} .

Після виключення грубих помилок визначають нові значення \bar{x} та σ з (n-1) або (n-2) вимірювань [7].

Другий метод встановлення грубих помилок ґрунтується на критерії В. І. Романовського, що використовують також для малої вибірки [7].

Методику виявлення грубих помилок зводять до того, що:

– задаються довірчою вірогідністю p_d і за табл. 1.4 залежно від n визначають коефіцієнт q ;

– обчислюють гранично допустиму абсолютну помилку окремого вимірювання $\varepsilon_{np} = \sigma \cdot q$.

Якщо $|\bar{x} - x_{\max}| > \varepsilon_{np}$, то вимірювання x_{\max} виключають з ряду спостережень. Цей метод більш вимогливий до очищення ряду від грубих похибок [7].

Таблиця 1.4 – Коефіцієнт для обчислення гранично допустимої помилки вимірювання q

n	P _d			
	0,95	0,98	0,99	0,995
5	3,04	4,10	5,04	9,43
6	2,78	3,64	4,36	7,41
7	2,62	3,36	3,96	6,37
8	2,51	3,18	3,71	5,73
9	2,43	3,05	3,54	5,31
10	2,37	2,96	3,41	5,01
12	2,29	2,83	3,23	4,62
14	2,24	2,74	3,12	4,37
16	2,20	2,68	3,04	4,20
18	2,17	2,64	3,00	4,07
20	2,15	2,60	2,93	3,98
30	1,96	2,33	2,58	3,29

У разі **більш глибокого аналізу** експериментальних даних рекомендують таку послідовність:

1) після отримання експериментальних даних у вигляді статистичного ряду його аналізують і виключають систематичні помилки;

2) аналізують ряд для виявлення грубих помилок:

– установлюють підозрілі значення x_{\max} , x_{\min} ;

– визначають середньоквадратичне відхилення σ ;

– обчислюють критерії β_1 , β_2 і зіставляють з β_{\max} , виключають за необхідності зі статистичного ряду x_{\max} або x_{\min} і одержують новий ряд з нових складових;

3) обчислюють середньоарифметичне \bar{x} , похибку окремих вимірювань $\bar{x} - x_i$ і середньоквадратичне відхилення обчисленого ряду σ ;

4) знаходять середньоквадратичне відхилення σ_0 серії вимірювань, коефіцієнт варіації k_v ;

5) за малої вибірки ($n < 30$) залежно від ухваленної довірчої ймовірності p_d і числа членів ряду n беруть коефіцієнт Ст'юдента $\alpha_{ст}$; за допомогою формули (5.9) для малої вибірки визначають довірчий інтервал;

6) установлюють за (5.10) дійсне значення досліджуваної величини x_d ;

7) оцінюють відносну похибку (%) результатів серії вимірювань із заданою довірчою ймовірністю p_d :

$$\delta = \frac{\sigma_0 \alpha_{ст}}{\bar{x}} 100. \quad (1.11)$$

Приклад виконання практичних робіт

Методичні вказівки щодо виконання практичної роботи № 1

У результаті проведення досліджень отримали вибірку значень (табл. 1.5). Під час аналізу засобів і результатів вимірювань з'ясовано, що систематичних помилок в експерименті не виявлено. Необхідно провести аналіз отриманих результатів вимірювань на наявність грубих помилок методом критерію β_{max} , методом 3σ , критерієм Романовського та методом довірчого інтервалу.

Таблиця 1.5 – Результати вимірювань

n	x_i	n	x_i	n	x_i	n	x_i
1	11,73	6	10,12	11	11,03	16	11,08
2	12,25	7	11,37	12	12,93	17	14,98
3	10,47	8	16,87	13	28,46	18	11,31
4	14,35	9	16,58	14	11,32	19	14,85
5	11,32	10	17,33	15	14,73	20	14,53

Розв'язання:

Крайні значення вибірки дорівнюють $x_{min} = 10,12$; $x_{max} = 28,46$.

Середньоарифметичне значення: $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{277,6}{20} = 13,88$.

Визначимо дисперсію:

$$D = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{322,28}{19} = 16,96,$$

та коефіцієнт варіації:

$$K_\sigma = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{4,12}{13,88} = 0,297,$$

де середньоквадратичне відхилення: $\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{16,96} = 4,12$.

Використовуючи **перший метод** перевірки на наявність грубих помилок – критерій β_{\max} – визначимо:

$$\beta_1 = \frac{28,46 - 13,88}{4,12 \cdot \sqrt{\frac{19}{20}}} = 3,96; \quad \beta_2 = \frac{13,88 - 10,12}{4,12 \cdot \sqrt{\frac{19}{20}}} = 0,94.$$

Порівнюємо значення отриманих критеріїв зі значенням β_{\max} .

Із табл. 1.3 при довірчій ймовірності $p_d = 0,95$ і кількості вимірювань у вибірці $n = 20$ обираємо $\beta_{\max} = 2,62$.

Оскільки $\beta_2 < \beta_{\max}$, вимірювання $x_6 = 10,12$ не є грубою помилкою. Проте $\beta_1 > \beta_{\max}$, отже, вимірювання $x_{13} = 28,46$ виконано грубо і його потрібно виключити.

Розраховуємо характеристики обчисленого ряду з кількістю вимірювань $n = 19$ (без значення $x_{13} = 28,46$).

Нові крайні значення вибірки: $x_{\min} = 10,12$; $x_{\max} = 17,33$.

Середньоарифметичне значення: $\bar{x} = \frac{249,14}{19} = 13,11$.

Визначаємо дисперсію, коефіцієнт варіації та середньоквадратичне відхилення:

$$D = \frac{109,12}{18} = 6,06; \quad K_\sigma = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{2,46}{13,11} = 0,297 \quad \sigma = \sqrt{6,06} = 2,46.$$

Нові значення: $\beta_1 = \frac{17,33-13,11}{2,46 \cdot \sqrt{\frac{18}{19}}} = 1,95;$ $\beta_2 = \frac{13,11-10,12}{2,46 \cdot \sqrt{\frac{18}{19}}} = 1,25.$

За довірчої ймовірності $p_d = 0,95$ і кількості вимірювань у вибірці $n = 19$ критерій $\beta_{\max} = 2,6$.

$\beta_2 < \beta_{\max}$ – вимірювання $x_6 = 10,12$ не є грубою похибкою.

$\beta_1 < \beta_{\max}$ – умову виконано.

В обчисленому ряді грубих помилок немає.

Використовуємо **другий метод** перевірки – правило 3σ .

Одержуємо $x_{\max, \min} = 13,88 \pm 3 \cdot 4,12 = 1,52 \dots 26,24$.

За правилом 3σ вимірювання $28,46$ потрібно виключити з ряду вимірювань.

Третій метод: критерій Романовського.

За заданим значенням вірогідності p_d з табл. 1.4 залежно від $n = 20$ визначаємо коефіцієнт $q = 2,15$.

Обчислюємо гранично допустиму абсолютну помилку окремого вимірювання $\varepsilon_{np} = \sigma \cdot q = 4,12 \cdot 2,15 = 8,858$.

Оскільки $|\bar{x} - x_{\max}| = |13,88 - 28,46| > \varepsilon_{np} = 8,858$, то вимірювання x_{\max} виключаємо з ряду спостережень.

Перевіримо отриманні експериментальні дані за **четвертим методом** довірчого інтервалу.

Визначаємо довірчий інтервал:

$$\mu_{cm} = \sigma_0 \alpha_{cm} = 1,19 \cdot 2,09 = 2,49,$$

де $\alpha_{cm} = 2,09$ – коефіцієнт Ст'юдента, обраний за табл. 1.2 залежно від

значення довірчої ймовірності p_d ; $\sigma_0 = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{4,12}{\sqrt{20}} = 1,19$ – середньоарифметичне

значення середньоквадратичного відхилення σ .

Обчислюємо дійсне значення величини для малої вибірки:

$$x_{\partial} = \bar{x} \pm \mu_{cm} = 11,39 \dots 16,37.$$

З отриманого результату видно, що з заданої вибірки необхідно виключити як x_{\min} , так і x_{\max} , оскільки кожне з цих значень не перебуває в отриманих межах.

Розрахуємо відносну похибку вимірювання:

$$\delta = \frac{\sigma_0 \alpha_{cm}}{\bar{x}} \cdot 100 \% = \frac{1,19 \cdot 2,09}{13,88} = 17,9 \%$$

Оскільки відносна похибка отриманих результатів вище 5 %, то необхідно розрахувати мінімальну кількість вимірювань:

$$N_{min} = \frac{\sigma^2 t^2}{\sigma_0^2} = \frac{K_v^2 t^2}{\Delta^2} = \frac{29,7^2 2^2}{5} = 142 \text{ вимірювання,}$$

де K_v – коефіцієнт варіації (мінливості), %; Δ – необхідна точність вимірювань, %; $t = 2$ – вибирається з табл. 1.1 за заданою довірчою вірогідністю p_d .

Завдання до теми

Виконати обробку результатів експериментальних вимірювань, значення експериментальних вимірювань узяти з табл. А.1 додатка А згідно з номером варіанта.

1. Визначити ймовірно-статистичні характеристики ряду вимірювань дисперсії: D , середньоквадратичне відхилення σ , коефіцієнт варіації k_v .
2. Перевірити вибірку на наявність грубих помилок за допомогою:
 - критерію β_{\max} ;
 - критерію Романовського q ;
 - довірчого інтервалу $\mu_{ст}$;
 - правила 3σ .
3. Порівняти отримані результати, зробити відповідні висновки.
4. Визначити відносну похибку вимірювань δ .
5. У разі, якщо похибка вимірювань перевищує 5 %, розрахувати мінімальну кількість вимірювань для отримання точності експерименту Δ , що дорівнює 5 %.

Контрольні питання

1. Дати визначення терміна «експеримент».
2. Перерахувати умови, яких дотримуються під час підготовки та проведення експерименту.
3. Які бувають види експериментів і їх призначення?
4. Наведіть етапи експерименту.
5. Пояснити необхідність застосування теорії випадкових похибок.
6. Як визначити вірогідність отриманих даних?
7. Як визначають мінімальну кількість вимірювань?
8. Дати визначення терміна «середня похибка».
9. Навіщо проводять перевірку наявності грубих помилок експериментального ряду?
10. Що таке правило «трьох сигм»?

Література: [4, с.145–165; 8, с.150–170; 9, с. 134–150].

Практичне заняття № 2

Тема. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Мета роботи: вивчення чисельних методів розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Рекомендації щодо оброблення результатів

Більшість задач обчислювальної практики зводиться до розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Це задачі зі сфери електротехніки, радіоелектроніки, механіки, статистики. До розв'язання СЛАР зводиться ряд задач аналізу, пов'язаних з наближенням функцій, розв'язанням систем диференціальних та інтегральних рівнянь та ін.

Подання сукупності чисел у вигляді таблиць зумовило розвиток матричного апарата і його широке застосування у науці й техніці завдяки зручності й ефективності впорядкування інформації [5, 8].

СЛАР у канонічній формі має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1; \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2; \\ \dots; \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \dots + a_{nn} \cdot x_n = b_n. \end{cases} \quad (2.1)$$

Цю систему може бути записано у матричному вигляді:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Систему (2.2) можна записати як $[A][X]=[B]$, де $[A]$ – матриця коефіцієнтів порядку $(n \times n)$; $[X]$ – матриця-стовпець порядку $(n \times 1)$, складена з незалежних змінних x_j ; $[B]$ – матриця-стовпець порядку $(n \times 1)$, складена з заданих коефіцієнтів b_j .

Запис системи (2.1) у вигляді матричного рівняння (2.2) відрізняється компактністю, дозволяє простіше оцінити властивості й закономірності явищ, спрощує і систематизує операції з перетворення і розв'язання початкових рівнянь.

Насамперед, під час розв'язання СЛАР треба переконатися, що вона має єдиний розв'язок (тобто матриця коефіцієнтів спільна) – якщо ранг (rang) матриці А дорівнює рангу розширеної матриці D: rang A = rang D. Система також має єдине розв'язання, якщо rang A дорівнює кількості невідомих n, і нескінченно багато розв'язань, якщо rang A < n. Якщо матриця А квадратна та її визначник (детермінант) не дорівнює нулю: $\det A \neq 0$, то вона називається невласною (неособливою). Матриця, що є невласною, спільна, і має єдине розв'язання.

Для розв'язання рівняння $[A][X]=[B]$ щодо матриці $[X]$ потрібно обидві частини цього рівняння помножити на $[A]^{-1}$. Тоді: $[A]^{-1}[A][X]=[A]^{-1}[B]$.

Ураховуючи, що $[A]^{-1}[A]=1$, одержимо:

$$[X]=[A]^{-1}[B]; \quad (2.3)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

де $[A]^{-1}$ – обернена матриця.

Обчислення оберненої матриці складається з дій:

– транспонувати початкову матрицю $[A]$ у матрицю $[A_t]$ заміною всіх рядків матриці її стовпцями;

– замінити кожний елемент знайденої матриці її алгебраїчним доповненням $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$,

$$\text{де } M_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(j-1)} & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{– мінор елемента}$$

a_{ij} матриці $[A]$;

– вчислити визначник Δ матриці $[A]$;

– поділити кожне значення Δ_{ij} на Δ .

Розв'язання рівнянь матричним способом є не завжди ефективним, оскільки пов'язано з тим, що коефіцієнти матриці A можуть мати різні порядки і під час переводу в обернену матрицю накопичується помилка.

Якщо матриця A не вироджена, тобто якщо її визначник не дорівнює нулю $\det A \neq 0$, то система рівнянь (2.1) має єдине розв'язання. Значення невідомих $x_i, i = 1, \dots, n$, може бути отримано за формулами **Крамера**:

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}, \dots, x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \quad (2.4)$$

де $\det A_1, \det A_2, \dots, \det A_i$ і $\det A$ – відповідно визначники матриць A_1, A_2, \dots, A_i

і A .

Визначник (детермінант) системи (2.1):

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

де $\det A_j$ – визначник, який отримують з A заміною стовпця, складеного з коефіцієнтів a_{kj} з невідомим x_j , стовпцем, складеним з вільних членів b_k :

$$\det A_j = \begin{vmatrix} b_1 & \dots & a_{1n} \\ b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Обчислення визначника матриці 2-го порядку здійснюють за схемою:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Обчислення визначника матриці 3-го порядку (за правилом Саррюса приписують перші два стовпці) здійснюють за схемою:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Розглянемо деякі властивості матриць.

У розгорнутому вигляді матрицю записують:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{iN} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{M1} & a_{M2} & \dots & a_{Mj} & \dots & a_{MN} \end{bmatrix},$$

де a_{ij} – числа, що утворюють матрицю і знаходяться в i -му рядку та j -му

стовпці.

Матрицю називають квадратною, якщо число рядків у ній дорівнює числу стовпців. Приклад квадратної матриці:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \left\| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right\|.$$

Діагональною називають матрицю вигляду $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$.

Матрицю, у якій елементи, розташовано по головній діагоналі, дорівнюють 1, а всі інші – нулі, називають одиничною: $[E] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Невизначеною називають матрицю, у якій сума елементів будь-якого рядка і будь-якого стовпця дорівнює нулю.

Дві матриці рівні, якщо рівні відповідні елементи цих матриць.

Наприклад, матриця $[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ дорівнює матриці $[B] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$,

якщо $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, $a_{21} = b_{21}$, $a_{22} = b_{22}$.

У рівних матрицях рівні визначники. Так, для розглянутого вище прикладу $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}$, але з рівності визначників двох матриць ще не впливає рівності самих матриць.

Під час додавання (вирухування) матриць варто скласти (відняти) відповідні елементи цих матриць.

Наприклад:

$$[A] + [C] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + c_{11} & a_{12} + c_{12} \\ a_{21} + c_{21} & a_{22} + c_{22} \end{bmatrix}.$$

Множення двох матриць (число стовпців першої має дорівнювати числу рядків другої) виконують за правилом « j рядок першої матриці помножується на k стовпець другої».

Для ілюстрації цього правила помножимо дві матриці, елементами яких є

числа

$$[A][B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{bmatrix}.$$

Керуючись наведеним правилом, неважко переконатися у тому, що $[A][B] \neq [B][A]$, тобто результуюча матриця залежить від послідовності розташування матриць співмножників.

На практиці для розв'язання матричних рівнянь застосовують прямі (точні) та ітераційні (наближені) чисельні методи.

Прямими називають методи, що в припущенні, що обчислення проводять без округлень, дозволяють отримати точне розв'язання за кінцеве число арифметичних операцій.

До прямих методів відносять: метод Крамера, методи Гаусса і його модифікації. Такі методи застосовують на практиці для розв'язання систем на ЕОМ з числами порядку не вище ніж 10^3 .

Ітераційні методи навіть у припущенні, що обчислення ведуть без округлень, дають наближене розв'язання системи з наперед заданою точністю. Точне розв'язання в цьому разі теоретично може бути отримано як результат нескінченного процесу. Характерними представниками цього класу є метод простих ітерацій, метод Зейделя. На практиці ітераційні методи застосовують для розв'язання систем з числами порядку 10^6 .

Відомо, що у випадках, коли матриця коефіцієнтів містить велику кількість нульових елементів, ітераційні методи заздалегідь дають краще розв'язання, ніж прямі методи.

Метод виключення Гауса та вибір головного елемента

Процес розв'язання СЛАР виду

$$AX = B \text{ чи } \sum_{j=1}^N a_{ij}x_j = b_j, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.5)$$

за методом виключення Гауса складається з двох етапів.

Шляхом перетворень систему (2.4) приводять до трикутного вигляду (тобто всі елементи матриці нижче головної діагоналі дорівнюють нулю):

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

причому коефіцієнти a і b не збігаються з коефіцієнтами вихідного матричного рівняння, а видозмінилися у процесі перетворень (1-й етап, прямий хід). Тоді з

останнього рівняння відразу визначаємо $x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$. Підставляючи x_n до

передостаннього рівняння, знаходимо x_{n-1} , x_{n-2} і т. д. (2-й етап, зворотний хід).

Процес приведення довільної системи до трикутної матриці за методом Гауса з вибором головного елемента системи полягає у тому, щоб:

- відняти з 2-го рівняння системи (2.4) перше, помножене на таке число, щоб знищився коефіцієнт при x_1 ; потім також відняти перше рівняння з 3-го, 4-го і т. д.; тоді виключають усі коефіцієнти першого стовпця, що перебувають нижче за головну діагональ;

- за допомогою 2-го рівняння виключити з 3-го, 4-го і т. д. рівнянь коефіцієнти другого стовпця; послідовно продовжуючи цей процес, виключити з матриці всі коефіцієнти, що перебувають нижче за головну діагональ.

Нехай задане матричне рівняння $AX = B$, а саме:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots\dots\dots; \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn-1}x_{n-1} + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Будемо вважати, що $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n-1}, a_{1n} \neq 0$.

Для приведення матриці до трикутного вигляду на першому кроці обчислень поділимо кожне рівняння на коефіцієнт a_{i1} , $i = 1 \dots n$:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n = \frac{b_1}{a_{11}} \\ x_1 + \frac{a_{22}}{a_{21}}x_2 + \dots + \frac{a_{2n}}{a_{21}}x_n = \frac{b_2}{a_{21}} \end{cases}.$$

Відніmemo з кожного j -го рівняння системи перше ($j = 2, 3, \dots, n$):

$$\left(\frac{a_{22}}{a_{21}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} \right) x_2 + \dots + \left(\frac{a_{2n}}{a_{21}} - \frac{a_{1n}}{a_{11}} \right) x_n = \frac{b_2}{b_{21}} - \frac{b_1}{b_{11}}.$$

Якщо у ході розрахунку на головній діагоналі виявився нульовий елемент $a_{jj} = 0$, то виконують перестановку рядків так, щоб на головну діагональ не потрапив цей елемент.

Якщо елемент на головній діагоналі a_{jj} малий, то цей рядок збільшується на велике число c_{mj} , що призводить до значних помилок округлення під час обчислень. Щоб уникнути цього, кожний цикл завжди починають з перестановки рядків. Серед елементів a_{mj} , $m > j$ знаходять головний, тобто найбільший за модулем в j -ому стовпці, та перестановкою рядків переводять на головну діагональ, після чого роблять виключення. Цей метод надійний, простий і найбільш вигідний для лінійних систем загального виду з щільно заповненою матрицею.

Ітераційні методи Якобі та Гауса-Зейделя

Для розв'язання систем лінійних рівнянь з великою кількістю невідомих (наприклад, під час розв'язання систем диференціальних рівнянь у часткових похідних) доцільним є застосування ітераційних методів Якобі, Гауса-Зейделя і т. д. [8].

Ітераційна формула Якобі:

$$x_j^{(k+1)} = \frac{b_j - a_{j1}x_1^{(k)} - \dots - a_{jj-1}x_{j-1}^{(k)} - a_{jj+1}x_{j+1}^{(k)} - \dots - a_{jN}x_N^{(k)}}{a_{jj}}, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (2.6)$$

Ітераційна формула Гауса-Зейделя:

$$x_j^{(k+1)} = \frac{b_j - a_{j1}x_1^{(k+1)} - \dots - a_{jj-1}x_{j-1}^{(k+1)} - a_{jj+1}x_{j+1}^{(k)} - \dots - a_{jN}x_N^{(k)}}{a_{jj}}, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (2.7)$$

Формули (2.5) і (2.6) дозволяють отримати послідовність векторів $\{P_k = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_j^{(k+1)}, \dots, x_N^{(k+1)})\}$ для наближення до точного розв'язку лінійної системи $P = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_N)$. При цьому в методі Якобі для

одержання всіх нових координат використовують усі старі координати; метод Гауса-Зейделя використовує нові координати за їх появою.

Розглянемо критерій збіжності ітераційних формул (2.6) і (2.7). Лінійна система $AX = B$ має єдиний розв'язок $X = P$ для будь-якого початкового вектора P_0 , коли матриця коефіцієнтів A є чітко діагонально домінантною.

Матриця A розміром $N \times N$ називається чітко діагонально домінантною, якщо виконується умова:

$$|a_{kk}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N |a_{kj}|, k = 1, 2, \dots, N. \quad (2.8)$$

Переважно метод Гауса-Зейделя збігається швидше, ніж метод Якобі. Проте у цих випадках формула (2.6) буде збігатися, незважаючи навіть на те, що формула (2.7) не збігається.

Під час використання ітераційних методів СЛАР необхідно привести систему (2.1) до ітераційного вигляду [1]:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n + \beta_1, \\ x_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n + \beta_2, \\ \dots \\ x_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \dots + \alpha_{nn}x_n + \beta_n, \end{cases} \quad (2.9)$$

або у матричній формі [7]:

$$x^{(k)} = \alpha x^{(k-1)} + \beta, k=1, 2, \dots \quad (2.10)$$

де k – номер ітерації.

Елементи матриці α і вектора β обчислюють за формулами:

$$\alpha_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}; \alpha_{ii} = 0; \beta_{ij} = \frac{b_i}{a_{ii}}; i, j = 1, 2, \dots, n$$

Ітераційний процес припиняється у разі виконання умови:

$$|x^{(k)} - x^{(k-1)}| \leq \frac{1 - \|A\|_1}{\|A\|_1} \cdot \varepsilon, \quad (2.11)$$

де ε – задана точність.

Приведення початкової СЛАР до вигляду (2.10) може бути виконано різними засобами, але необхідно вибрати такий, щоб система (2.10) приводила до ітераційного процесу, який збігається. Таку задачу завжди розв'язують за допомогою лінійних комбінацій, якщо система має розв'язання. Аналіз збіжності ітераційних методів розв'язання СЛАР пов'язаний з поняттям норми матриці. Найбільше поширення отримали такі норми матриць [1, 7]:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| < 1 \quad - \text{максимальна із сум модулів коефіцієнтів з}$$

невідомими у правій частині системи (2.9), узятими по рядках, має бути менше одиниці;

$$\|A\|_2 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |\alpha_{ij}| < 1 \quad - \text{максимальна із сум модулів коефіцієнтів з}$$

невідомими у правій частині системи (2.9), узятими по стовпцях, має бути менше одиниці;

$$\|A\|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2} < 1 \quad - \text{сума квадратів усіх коефіцієнтів при невідомих у}$$

правій частині системи (2.9) має бути менше одиниці.

Існує правило: якщо хоча б одна з перелічених норм матриці коефіцієнтів рівняння (2.10) менше одиниці, то ітераційний процес буде збіжним за будь-якого вибору початкового наближення. Для застосування ітераційного процесу можна скористатися нерівністю:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, i = \overline{1..n}, j \neq i. \quad (2.12)$$

Тобто, якщо діагональні елементи матриці А переважають інші, то для цієї матриці можна застосовувати ітераційний процес. Якщо нерівність (2.11) не виконується, то за допомогою лінійних комбінацій можна досягти виконання вказаної вимоги.

У деяких випадках зручно оцінити кількість ітерацій для досягнення заданої точності розв'язання системи (2.8):

$$k \geq \frac{1}{\lg \|A\|} [\lg \varepsilon - \lg \|\beta\|_1 + \lg(1 - \|A\|)] - 1, \quad (2.13)$$

де $\|\beta\|_1 = \max_{i \leq n} |\beta_i|$ – норма вектора коефіцієнтів вільних членів системи (2.10).

Приклади виконання практичних робіт

Методичні вказівки щодо виконання практичної роботи № 2

Приклад 1. Розв'язати СЛАР, використовуючи розглянуті прямі (матричний, Гауса, Крамера) методи:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21; \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$$

Розв'язання СЛАР матричним методом.

Запишемо систему в матричній формі:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 21 \\ 9 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Розв'язання системи знайдемо за формулою:

$$[X] = [A]^{-1} [B],$$

де $[A]^{-1} = \frac{1}{|A|} A^T$ – обернена матриця; A^T – транспонована матриця

алгебраїчних доповнень відповідних елементів матриці A .

Розрахуємо визначник матриці:

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= 3(-4 - 2) + 2(-3 + 4) + 4(-3 - 8) = -18 + 2 - 44 = -60. \end{aligned}$$

У цьому разі визначник розрахований за першим рядком. Якщо визначник $|A| = 0$, то оберненої матриці не існує і розв'язання системи рівнянь матричним методом неможливо.

Розрахуємо дев'ять мінорів і запишемо їх у матрицю:

$$M = \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{vmatrix}.$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 2 = -6;$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 4 = 1;$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 8 = -11;$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 4 = 6;$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 8 = -11;$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 4 = 1;$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 16 = -12;$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 12 = -18;$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 6 = 18.$$

Отримали матрицю мінорів відповідних елементів матриці А:

$$M = \begin{vmatrix} -6 & 1 & -11 \\ 6 & -11 & 1 \\ -12 & -18 & 18 \end{vmatrix}.$$

Визначимо матрицю алгебраїчний доповнень:

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} = \begin{vmatrix} -6 & -1 & -11 \\ -6 & -11 & -1 \\ -12 & 18 & 18 \end{vmatrix}.$$

Тоді транспонована матриця буде мати вигляд:

$$A^T = \begin{vmatrix} -6 & -6 & -12 \\ -1 & -11 & 18 \\ -11 & -1 & 18 \end{vmatrix}.$$

Розрахуємо обернену матрицю:

$$[A]^{-1} = \frac{1}{|A|} A^T = \frac{1}{-60} \begin{vmatrix} -6 & -6 & -12 \\ -1 & -11 & 18 \\ -11 & -1 & 18 \end{vmatrix} = \frac{1}{60} \begin{vmatrix} 6 & 6 & 12 \\ 1 & 11 & -18 \\ 11 & 1 & -18 \end{vmatrix}.$$

Тоді розв'язанням системи рівнянь буде:

$$\begin{aligned} [X] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= [A]^{-1} [B] = \frac{1}{60} \begin{bmatrix} 6 & 6 & 12 \\ 1 & 11 & -18 \\ 11 & 1 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 21 \\ 9 \\ 10 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{60} \begin{bmatrix} 6 \cdot 21 + 6 \cdot 9 + 12 \cdot 10 \\ 1 \cdot 21 + 11 \cdot 9 - 18 \cdot 10 \\ 11 \cdot 21 + 1 \cdot 9 - 18 \cdot 10 \end{bmatrix} = \frac{1}{60} \begin{bmatrix} 300 \\ -60 \\ 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Тобто $x_1 = 5$; $x_2 = -1$; $x_3 = 1$.

Розв'язання СЛАР за формулами Крамера

Визначимо детермінант системи:

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 3 & -2 & 41 \\ 3 & 4 & -21 \\ 22 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= 3(-4 - 2) + 2(-3 + 4) + 4(-3 - 8) = -18 + 2 - 44 = -60 \neq 0, \end{aligned}$$

тобто система рівнянь має єдиний розв'язок.

Розрахуємо визначники матриць A_1 , A_2 , A_3 , що отримані з A заміною відповідних стовпців стовпцем, складеним з вільних членів.

$$\begin{aligned} \det A_1 &= \begin{vmatrix} 21 & -2 & 4 \\ 9 & 4 & -2 \\ 10 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 21 \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= 21(-4 - 2) + 2(-9 + 20) + 4(-9 - 40) = -126 + 22 - 196 = -300; \end{aligned}$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 3 & 21 & 4 \\ 3 & 9 & -2 \\ 2 & 10 & -1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} - 21 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(-9 + 20) - 21(-3 + 4) + 4(30 - 18) = 33 - 21 + 48 = 60;$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 21 \\ 3 & 4 & 9 \\ 2 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ -1 & 10 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -2 & 21 \\ -1 & 10 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -2 & 21 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(40 + 9) - 3(-20 + 21) + 2(-18 - 84) = 147 - 3 - 284 = -60.$$

Тоді значення невідомих:

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-300}{-60} = 5; \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{60}{-60} = -1; \quad x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{-60}{-60} = 1.$$

Розв'язання СЛАР методом Гаусса.

$$\begin{cases} (1) & 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21; \\ (2) & 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9; \\ (3) & 2x_1 - x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$$

Розділивши рівняння (1) на коефіцієнт при x_1 цього рівняння, отримаємо:

$$\begin{cases} (1) & x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{4}{3}x_3 = 7; \\ (2) & 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9; \\ (3) & 2x_1 - x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$$

Від (2) та (3) рівнянь віднімаємо (1), помножену відповідно на 3 та 2:

$$\begin{cases} (1) & x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{4}{3}x_3 = 7; \\ (2) & 6x_2 - 6x_3 = -12; \\ (3) & \frac{1}{3}x_2 - \frac{11}{3}x_3 = -4. \end{cases}$$

Розділимо (2) на 6:

$$\begin{cases} (1) & x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{4}{3}x_3 = 7; \\ (2) & x_2 - x_3 = -2; \\ (3) & \frac{1}{3}x_2 - \frac{11}{3}x_3 = -4. \end{cases}$$

Від (1) та (3) віднімаємо (2), помножене на $-2/3$, $1/3$, відповідно.

$$\begin{cases} (1) & x_1 + \frac{2}{3}x_3 = \frac{17}{3}; \\ (2) & x_2 - x_3 = -2; \\ (3) & -\frac{10}{3}x_3 = -\frac{10}{3}. \end{cases}$$

Рівняння (3) розділимо на $-10/3$

$$\begin{cases} (1) & x_1 + \frac{2}{3}x_3 = \frac{17}{3}; \\ (2) & x_2 - x_3 = -2; \\ (3) & x_3 = 1. \end{cases}$$

Від (1) та (2) віднімаємо (3), помножене на $2/3$ та -1 , відповідно:

$$\begin{cases} (1) & x_1 = 5; \\ (2) & x_2 = -1; \\ (3) & x_3 = 1. \end{cases}$$

Приклад 2. Знайти розв'язок лінійної системи $\begin{cases} 4x - y + z = 7; \\ 4x - 8y + z = -21; \\ -2x + y + 5z = 15; \end{cases}$ за

допомогою ітераційних методів Якобі та Гауса-Зейделя для початкового наближення $P_0 = (x_0; y_0; z_0) = (1; 2; 2)$.

Розв'язання

Матриця коефіцієнтів вихідної системи $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 4 & -8 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ є чітко

діагонально доміантною, тому що виконується умова (2.8): $|4| > |-1| + |1|$; $|-8| > |4| + |1|$; $|5| > |-2| + |1|$ і має єдиний розв'язок $x = 2, y = 4, z = 3$. Оскільки матриця коефіцієнтів A чітко діагонально доміантна, то ітераційні формули методів Якобі та Гауса-Зейделя збігатимуться.

Для вихідної систему ітераційні формули Якобі матимуть вигляд:

$$x_{k+1} = \frac{7 + y_k - z_k}{4}; y_{k+1} = \frac{21 + 4x_k + z_k}{8}; z_{k+1} = \frac{15 + 2x_k - y_k}{5}.$$

Підставимо $x_0 = 1, y_0 = 2, z_0 = 2$ до правої частини кожної ітераційної формули Якобі для отримання нових значень:

$$x_1 = \frac{7+2-2}{4} = 1,75; y_1 = \frac{21+4+2}{8} = 3,275; z_1 = \frac{15+2-2}{5} = 3,00.$$

Нова точка $P_1 = (1,75; 3,375; 3,00)$ ближче до точного розв'язку $(2; 4; 3)$ ніж початкова точка P_0 . У табл. 2.1 наведено послідовність точок $\{P_k\}$, що збігаються до точного розв'язку $(2; 4; 3)$ і отримані за допомогою методу Якобі.

Таблиця 2.1 – Результати ітераційного процесу Якобі

k	x_k	y_k	z_k
0	1,0	2,0	2,0
1	1,75	3,375	3,0
2	1,84375	3,875	3,025
3	1,9625	3,925	2,9625
4	1,99062500	3,97656250	3,00000000
5	1,99414063	3,99531250	3,00093750
⋮	⋮	⋮	⋮
15	1,99999993	3,99999985	2,99999993
⋮	⋮	⋮	⋮
19	2,00000000	4,00000000	3,00000000

Із табл. 2.1 видно, що після 19 кроків ітерація Якобі збігається до точного розв'язку з дев'ятьма значимими цифрами $(2,00000000; 4,00000000; 3,00000000)$.

Ітеративний процес Гауса-Зейделя для заданої лінійної системи матиме вигляд:

$$x_{k+1} = \frac{7 + y_k - z_k}{4}; y_{k+1} = \frac{21 + 4x_{k+1} + z_k}{8}; z_{k+1} = \frac{15 + 2x_{k+1} - y_{k+1}}{5}.$$

Підставимо $y_0 = 2, z_0 = 2$ до першої ітераційної формули Гауса-Зейделя і отримаємо:

$$x_1 = \frac{7 + 2 - 2}{4} = 1,75.$$

Потім зробимо підстановку $x_1 = 1,75, z_0 = 2$ до другої формули:

$$y_1 = \frac{21 + 4(1,75) + 2}{8} = 3,75.$$

Підстановка $x_0 = 1,75$, $y_1 = 3,75$ до останньої ітераційної формули дає:

$$y_1 = \frac{15 + 2(1,75) - 3,75}{5} = 2,95.$$

Нова точка $P_1 = (1,75; 3,75; 2,95)$ ближче до точного розв'язку $(2; 4; 3)$ ніж початкова точка P_0 і ліпше за точку, яку отримано за допомогою методу Якобі. У табл. 2.2 наведено послідовність точок $\{P_k\}$, що збігаються до точного розв'язку $(2; 4; 3)$ і отримані за допомогою методу Гауса-Зейделя.

Таблиця 2.2 – Результати ітераційного процесу Гауса-Зейделя

k	x_k	y_k	z_k
0	1,0	2,0	2,0
1	1,75	3,75	2,95
2	1,95	3,96875	2,98625
3	1,995625	3,99609375	2,99903125
⋮	⋮	⋮	⋮
8	1,99999983	3,99999988	2,99999996
9	1,99999998	3,99999999	3,00000000
10	2,00000000	4,00000000	3,00000000

Порівняльний аналіз табл. 2.1. і 2.2 свідчить, що метод Гауса-Зейделя дозволяє отримати розв'язок вихідної системи на 9 кроків швидше, ніж метод Якобі.

Завдання до теми. Розв'язати СЛАР, використовуючи розглянуті прямі (матричний, Гауса, Крамера) та ітераційні методи:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Коефіцієнти і вільні члени СЛАР заданої системи рівнянь наведено у табл. Б.1 додатку Б.

Контрольні запитання

1. Наведіть загальний вигляд СЛАР.

2. Запишіть СЛАР у матричному вигляді й наведіть її розв'язання, використовуючи формули Крамера.

3. Назвіть основні типи й властивості матриці.

4. Як обчислюють визначник матриці?

5. Які дії виконують над матрицями?

6. Які матриці називають однорідними, визначеними?

7. Як здійснюють обернення й транспонування матриць?

8. На які групи поділяють на практиці методи, що використовують для розв'язання СЛАР? Дайте порівняльну оцінку методам розв'язання СЛАР.

9. У чому полягає суть методу Гаусса з вибором головного елемента? Поясніть поняття «прямий» та «зворотний» хід методу Гаусса. Навіщо у методі Гаусса потрібний етап «вибір головного елемента»?

10. Як перевірити збіжність методу?

11. У чому полягає метод простих ітерацій?

12. Що є умовою закінчення ітераційного процесу?

Література: [1, с. 24–59; 7, с. 65–118; 11, с. 55–63].

Практичне заняття № 3

Тема. Методи розв'язання нелінійних рівнянь. Числові методи розв'язання диференціальних рівнянь і їх систем

Мета роботи: набуття навичок розв'язання систем лінійних і нелінійних рівнянь з використанням методів Гауса, Якобі, Гауса-Зейделя та методів поділу навпіл, послідовних ітерацій, Ньютона відповідно; набуття навичок розв'язання диференціальних рівнянь за допомогою числових методів Ейлера, Гюна, Рунге-Кутта, Тейлора, Мілна-Сімпсона, Адамса-Бешфорса-Маултона, Хемінга

Короткі теоретичні відомості

Розв'язання нелінійних рівнянь з однією змінною

У практиці наукових та інженерних розрахунків часто виникає необхідність у розв'язанні рівнянь вигляду:

$$f(x) = 0, \quad (3.1)$$

де $f(x)$ – функція, яка визначена і неперервна на деякому кінцевому або нескінченному інтервалі $a \leq x \leq b$.

Якщо функція являє собою алгебраїчний поліном, то рівняння (3.1) називають алгебраїчним. Якщо функція містить логарифмічні, тригонометричні та інші спеціальні функції, то рівняння (3.1) називають трансцендентним. Алгебраїчні та трансцендентні рівняння обчислюють однаковими методами.

Методи розв'язання нелінійних рівнянь (3.1) поділять на прямі та ітераційні. Прямі методи дозволяють записати корені нелінійного рівняння у вигляді деякого кінцевого співвідношення (формули). Однак переважну більшість нелінійних рівнянь не розв'язують прямими (точними) методами, на практиці їх розв'язують лише числовими методами.

Процес відшукування кореня рівняння $f(x) = 0$ складається з двох етапів:

1) відділення коренів, тобто відшукування інтервалів, усередині яких міститься по одному кореню рівняння, єдиному на цьому інтервалі;

2) уточнення значень окремих коренів до деякої заданої міри точності.

На першому етапі під час виділення області, у межах якої знаходяться дійсні корені рівняння, можна скористатися такою умовою. Якщо на кінцях деякого відрізка значення неперервної функції $f(x)$ має різні знаки, то на цьому відрізку рівняння $f(x) = 0$ має хоча б один корінь.

Під час графічного способу визначення наближених коренів будують графік функції, точки перетину якого з віссю абсцис дадуть наближені значення коренів.

На другому етапі виконують уточнення коренів різноманітними ітераційними методами. Для розв'язання рівняння (3.1) функція $f(x)$ має бути неперервною на проміжку $[a; b]$ і задовольняти умову $f(a)f(b) < 0$. Окрім того, як і в усіх ітераційних методах, головною характеристикою є збіжність ітераційного процесу.

У методі поділу навпіл відрізок $[a; b]$ ділять навпіл і вибирають той напівінтервал, на кінцях якого знаки функції $f(x)$ різні (рис. 3.1). Потім процес

поділу повторюють доти, доки довжина інтервалу, що містить корінь, не стане меншою за точність ε . Метод поділу навпіл досить повільний, однак він завжди збігається, тобто під час його використання завжди можна отримати розв'язання, причому з заданою точністю.

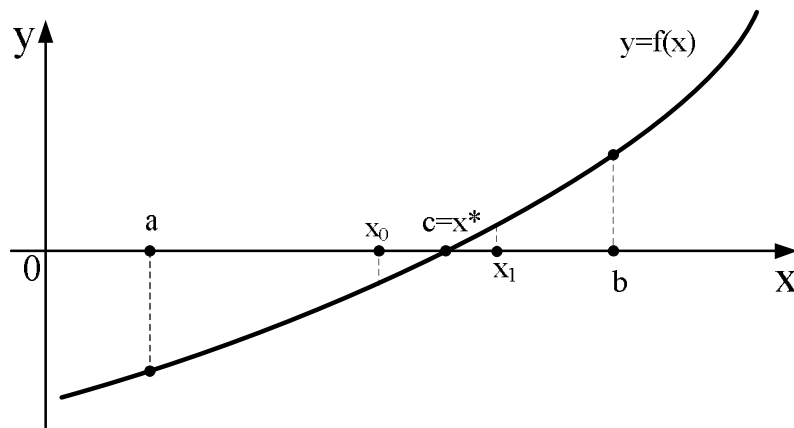


Рисунок 3.1 – Геометрична інтерпретація методу поділу навпіл

У методах простих ітерацій, хорд, Ньютона (метод дотичних) використовують значення початкового (нульового) наближення до шуканого кореня. У цих методах ітераційний процес здійснюють за формулою, яку в загальному вигляді можна записати так:

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3.2)$$

де за φ позначено вираз, який для кожного зі згаданих методів свій. Окрім того, x_0 – початкове наближення, значення якого визначають за певними правилами залежно від методу, k – номер ітерації.

У методі послідовних ітерацій рівняння (3.1) замінюють рівносильним рівнянням $x_{k+1} = f(x_k), k = 0, 1, \dots$, за яким і здійснюють ітераційний процес. Однак сфера застосування цього методу обмежена. Якщо у межах кореня похідна $|f'(x)| < 1$ і початкове наближення достатньо близьке до кореня, то процедура ітерації збігається, в іншому випадку – розминається. Збіжність методу суттєва тоді, коли $|f'(x)| \ll 1$.

Метод хорд використовують, коли на відрізку $[a; b]$ зберігає знак не

тільки перша похідна $f'(x)$, а й друга – $f''(x)$. Тоді хорда, що з'єднує кінці дуги ab графіка функції на інтервалі $[a; b]$, завжди розташована з боку увігнутості цієї дуги, і точка x_0 , що є нульовим наближенням кореня, завжди розташована ближче до того кінця відрізка $[a; b]$, у якому знак функції $f(x)$ протилежний $f''(x)$, тобто $f(x)f''(x) < 0$ (рис. 3.2).

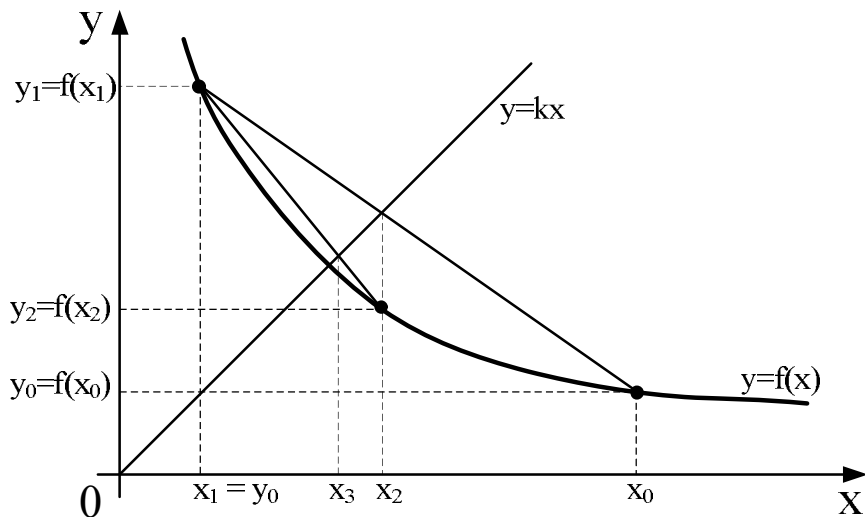


Рисунок 3.2 – Геометрична інтерпретація методу хорд

Якщо $f(b)f''(b) < 0$, то за початкове наближення беруть праву межу відрізка $[a; b]$, тобто $x_0 = b$ і обчислення проводять за формулою

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k - a)f(x_k)}{f(x_k) - f(a)}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Якщо $f(a)f''(a) < 0$, то за початкове наближення беруть ліву межу відрізка $[a; b]$, тобто $x_0 = a$ і обчислення проводять за формулою:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(b - x_k)f(x_k)}{f(b) - f(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Ідея методу Ньютона зводиться до заміни функції $f(x)$ на кожній ітерації дотичною до неї у точці x_k . У цьому методі за початкове наближення x_0 вибирають той з кінців відрізка $[a; b]$, у якому знаки $f(x_0)$ і $F'(x_0)$ співпадають, тобто $f(x)f''(x) > 0$ і обчислення проводять за формулою:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Геометричну інтерпретацію методу Ньютона наведено на рис. 3.3.

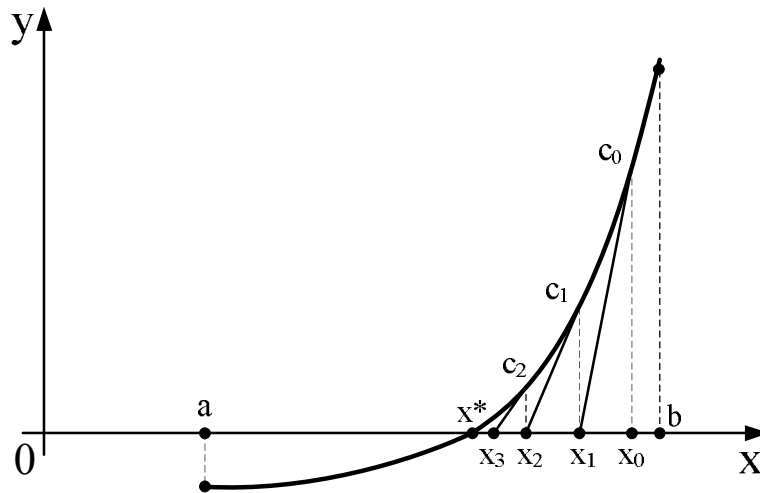


Рисунок 3.3 – Геометрична інтерпретація методу Ньютона

Отже, у цих методах відстань між наступним x_{k+1} і попереднім x_k наближеннями до кореня зменшуватиметься з кожною ітерацією. Процес уточнення кореня закінчується, коли виконається умова:

$$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon, \quad (3.3)$$

де ε – припустима похибка визначення кореня.

Ефективність числового методу розв'язання нелінійних рівнянь значною мірою визначають його універсальністю, простотою організації обчислювального процесу, швидкістю збіжності.

Найбільш універсальний метод ділення навпіл. Він гарантує отримання розв'язання для будь-якої неперервної функції $f(x)$, якщо знайдено інтервал, на якому вона змінює знак. Метод послідовних наближень і метод Ньютона висувають до функції жорсткіші вимоги. Обчислення методом ділення навпіл можна починати з будь-якого відрізка $[a; b]$, на кінцях якого функція має різні знаки. При цьому процес збігається до кореня x^* рівняння $f(x) = 0$. Збіг методу послідовних наближень і методу Ньютона залежить від вибору початкової точки. Під час розв'язання практичних завдань не завжди вдається перевірити виконання необхідних обмежень на вибір початкового наближення.

Під час реалізації вказаних методів необхідно передбачати обчислення похідних функції для організації ітераційного процесу і перевірки умов збігу. Це істотно ускладнює обчислення.

Важливою перевагою методу Ньютона є висока швидкість збігу, що забезпечує значну економію машинного часу під час розв'язання складних нелінійних рівнянь.

Розв'язання систем нелінійних алгебраїчних рівнянь з багатьма змінними.

Систему n нелінійних (алгебраїчних чи трансцендентних) рівнянь з n невідомими у загальному випадку може бути записано так:

$$f_n(x_n) = 0.$$

Такі системи розв'язують практично тільки ітераційними методами, найбільш поширені серед яких методи Ньютона і Зейделя.

Метод Ньютона ґрунтується на введенні матриці Якобі $J(x) = \partial f_i / \partial x_i$ – матриця перших частинних похідних функцій за змінними $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ причому функції $f_i(x_i), i = 1, 2, \dots, n$ є неперервно диференційованими. Якщо матриця $J(x)$ не є виродженою, то система має єдине розв'язання. Вибирають вектор початкових наближень $X^{(0)} = x_i^{(0)}, i = 1, \dots, n$ і розв'язують лінійну систему: $J(X^{(k)})\Delta X = -F(X^{(k)})$, де $F(x_i) = (f_i(x_i)), i = 1, 2, \dots, n$ – вектор-функція нелінійної системи рівнянь; $\Delta X = (\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)$ – вектор помилок для k -ої ітерації; $X^{(k)}$ – вектор, що є розв'язання системи. Наступне наближення обчислюють за формулою: $x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \Delta x_i$. Ітераційний процес припиняється, якщо виконується умова $\Delta x_i < \varepsilon$ для кожного Δx_i .

За початкове наближення $X^{(0)} = x_i^{(0)}, i = 1, 2, \dots, n$ може бути взято будь-яке значення шуканого кореня. Однак метод Ньютона ефективний у достатньо малій області поблизу кореня.

У методі Зейделя початкову систему нелінійних рівнянь замінюють еквівалентною $x_i = \varphi(x_i), i = 1, 2, \dots, n$. Задають початкові наближення і

здійснюють ітераційний процес Зейделя, аналогічний до однойменного процесу розв'язання СЛАР:

$$x_i^{k+1} = \varphi_i(x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \dots, x_{i-1}^{k+1}, x_i^k, \dots, x_n^k), \quad i = 1, \dots, n,$$

тобто вже обчисленні наближення невідомих $x_1^{k+1}, \dots, x_{i-1}^{k+1}$ використовують під час обчислення x_i^{k+1} . Як критерій припинення ітераційного процесу може бути використано умову: $|x_i^{k+1} - x_i^k| < \varepsilon, \quad i = 1, \dots, n$, де ε – задана точність обчислень.

Обчислення за методом Зейделя достатньо прості. Однак отримання системи $x = \varphi(x)$, еквівалентної початковій $f(x) = 0$ з одночасним забезпеченням збігу, є складною задачею. Ітераційний процес збігається за умови:

$$\sum_{i,k=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \right| < 1.$$

Розв'язання диференціальних рівнянь.

Більшість технічних систем і технологічних процесів описують диференціальними рівняннями або системами диференціальних рівнянь високого порядку, аналітичний розв'язок яких досить ускладнений. У таких випадках для одержання розв'язку доцільним є застосування числових методів моделювання [5, 8].

Усі відомі числові методи поділяють на дві групи: однокрокові та багатокрокові. Серед однокрокових найбільш поширені метод Ейлера, Гюна, метод рядів Тейлора, Рунге-Кутта, модифікований метод Ейлера-Коші. На практиці широкого застосування набули багатокрокові методи прогнозу-корекції, а саме метод Адамса-Бешфорса-Маултона, Мілна-Сімпсона та метод Хемінга [8].

Розглянемо особливості деяких методів і характерні для них рекурентні формули на прикладі розв'язання задачі Коші $y' = f(t, y)$ на інтервалі $[t_0; t_M]$ з початковою умовою $y(t_0) = y_0$.

Для розрахунку значення функції наступної точки за допомогою

однокрокових методів необхідна інформація тільки від однієї попередньої точки.

Рекурентні співвідношення для наближеного розв'язання диференціального рівняння за допомогою *методу Ейлера* мають вигляд:

$$t_{k+1} = t_k + h, \quad y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k) \quad \text{для } k = 0, 1, \dots, M-1. \quad (3.4)$$

Рекурентні формули *методу Гюна*:

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= y_k + hf(t_k, y_k), \quad t_{k+1} = t_k + h, \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{2}(f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, p_{k+1})). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Наближений числовий розв'язок задачі Коші $y'(t) = f(t, y(t))$ на інтервалі $[t_0; t_M]$ за допомогою методу Тейлора отримують, використовуючи на кожному підінтервалі $[t_k; t_{k+1}]$ розкладання функції $y(t)$ у ряд Тейлора порядку N поблизу фіксованої точки $t = t_k \in [t_0; t_M]$. Загальна формула для методу Тейлора порядку N має вигляд:

$$y_{k+1} = y_k + d_1 h + \frac{d_2 h^2}{2!} + \frac{d_3 h^3}{3!} + \dots + \frac{d_N h^N}{N!}, \quad (3.6)$$

де $d_j = y^{(j)}(t_k)$ для $j = 1, 2, \dots, N$ на кожному кроці $k = 0, 1, \dots, M$.

Метод Рунге-Кутта 4-го порядку за точністю подібний до методу рядів Тейлора порядку $N = 4$. Метод ґрунтується на розрахунку y_{k+1} за допомогою рекурентного співвідношення:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)}{6}, \quad (3.7)$$

де

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_k, y_k), \\ k_2 &= f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} \cdot k_1\right), \\ k_3 &= f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} k_2\right), \\ k_4 &= f(t_k + h, y_k + hk_3). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Багатокрокові методи передбачають розрахунок кожного наступного

значення функції за рядом попередніх значень. При цьому необхідно одним з однокрокових методів обчислити ряд початкових значень.

Метод прогнозу-корекції Адамса-Бешфорса-Маултона (Adams-Bashforth-Moulton) – це багатокроковий метод, отриманий з фундаментальної теореми аналізу:

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt. \quad (3.9)$$

Прогноз використовує наближення поліномом Лагранжа для функції $f(t, y(t))$, побудованою за точками $(t_{k-3}; f_{k-3}), (t_{k-2}; f_{k-2}), (t_{k-1}; f_{k-1}), (t_k; f_k)$. Це функція, що інтегрується на інтервалі $[t_k; t_{k+1}]$. Процес, що породжує прогноз Адамса-Бешфорса, має вигляд:

$$p_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}(-9f_{k-3} + 37f_{k-2} - 59f_{k-1} + 55f_k). \quad (3.10)$$

Коректор можна отримати за аналогією. Наступний поліном Лагранжа для функції $f(t, y(t))$ будують за точками $(t_{k-2}; f_{k-2}), (t_{k-1}; f_{k-1}), (t_k; f_k)$ і новою точкою $(t_{k+1}; f_{k+1}) = (t_{k+1}; f(t_{k+1}, p_{k+1}))$. Шляхом інтегрування на відрізку $[t_k; t_{k+1}]$ отримують коректор Адамса-Маултона:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}(f_{k-2} - 5f_{k-1} + 19f_k + 9f_{k+1}). \quad (3.11)$$

Інша найбільш поширена схема «прогноз-коректор» відома за назвою *методу Мілна-Сімпсона*. Прогноз методу ґрунтується на інтегруванні функції $f(t, y(t))$ на інтервалі $[t_{k-3}; t_{k+1}]$:

$$y(t_{k+1}) = y(t_{k-3}) + \int_{t_{k-3}}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt. \quad (3.12)$$

Прогноз використовує наближення полінома Лагранжа для $f(t, y(t))$, побудованим за точками $(t_{k-3}; f_{k-3}), (t_{k-2}; f_{k-2}), (t_{k-1}; f_{k-1})$ і $(t_k; f_k)$. Прогноз Мілна отримують після інтегрування функції на інтервалі $[t_{k-3}; t_{k+1}]$:

$$p_{k+1} = y_{k-3} + \frac{4h}{3}(2f_{k-2} - f_{k-1} + 2f_k). \quad (3.13)$$

Коректор отримуємо за допомогою побудови поліному Лагранжа для функції $f(t, y(t))$ за точками $(t_{k-1}; f_{k-1})$, $(t_k; f_k)$ і новою точкою $(t_{k+1}; f_{k+1}) = (t_{k+1}; f(t_{k+1}, p_{k+1}))$, результатом інтегрування якого на відрізку $[t_{k-1}; t_{k+1}]$ є відома формула Сімпсона:

$$y_{k+1} = y_{k-1} + \frac{h}{3}(f_{k-2} + 4f_{k-1} + f_{k+1}). \quad (3.14)$$

Приклади виконання практичних робіт

Методичні вказівки щодо виконання практичної роботи № 3

Приклад 1. Знайти розв'язок нелінійного рівняння $x \sin(x) - 1 = 0$ на інтервалі $[0; 2]$ за допомогою методу поділу навпіл.

Розв'язання

Пошук розв'язку нелінійного рівняння полягає у знаходженні нульового значення функції $f(x) = x \sin(x) - 1$. Розпочнемо з $a_0 = 0$, $b_0 = 2$ й обчислимо $f(0) = -1,000000$, $f(2) = -0,818595$. Функція $f(x)$ має протилежний знак, тому корінь рівняння $f(x) = 0$ знаходять на інтервалі $[0; 2]$.

Координати середньої точки – $c_0 = 1$ і $f(1) = -0,158529$. Функція $f(x)$ змінює знак на інтервалі $[c_0; b_0] = [1; 2]$, тому далі виконується зміщення вліво – знаходяться межі інтервалу $a_1 = c_0$, $b_1 = b_0$ для наступного кроку. На наступній ітерації середня точка дорівнює $c_1 = 1,5$, а $f(c_1) = 0,496242$. З аналізу значень $f(1) = -0,158529$ і $f(1,5) = 0,496242$ видно, що розв'язок рівняння знаходиться на інтервалі $[a_1; c_1] = [1,0; 1,5]$. Наступним кроком є зміщення вправо – $a_2 = a_1$, $b_2 = c_1$. Отже, отримуємо послідовність точок $\{c_k\}$, яка збігається до значення 1,114157141, що є розв'язком нелінійного рівняння $x \sin(x) - 1 = 0$. Приклад розрахунків наведено у табл. 3.1.

Таблиця 3.1 – Розв’язання нелінійного рівняння методом поділу навпіл

k	Ліва межа, a_k	Середня точка, c_k	Права межа, b_k	Значення функції, $f(c_k)$
0	0	1	2	-0,158529
1	1,0	1,5	2,0	0,496242
2	1,00	1,25	1,50	0,186231
3	1,000	1,125	1,250	0,015051
4	1,0000	1,0625	1,1250	-0,071827
5	1,06250	1,09375	1,12500	-0,028362
6	1,093750	1,109375	1,125000	-0,006643
7	1,1093750	1,1171875	1,1250000	0,004208
8	1,10937500	1,11328125	1,11718750	-0,001216
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Приклад 2. Знайти розв’язок нелінійного рівняння $x^3 - 3x + 2 = 0$ за допомогою методу хорд, починаючи з $x_0 = -2,6$ і $x_1 = -2,4$.

Розв’язання

Знайдемо точний розв’язок $x^* = -2$ вихідного нелінійного рівняння за допомогою методу хорд. Розрахунок почнемо з точок $x_0 = -2,6$ і $x_1 = -2,4$.

У даному випадку ітераційна формула методу хорд матиме вигляд:

$$x_{k+1} = f(x_k, x_{k-1}) = x_k - \frac{(x_k^3 - 3x_k + 2)(x_k - x_{k-1})}{x_k^3 - x_{k-1}^3 - 3x_k + 3x_{k-1}} = \frac{x_k^2 x_{k-1} + x_k x_{k-1}^2 - 2}{x_k^2 + x_k x_{k-1} + x_{k-1}^2 - 3}$$

Послідовність ітерацій наведено в табл. 3.2, з якої видно, що метод хорд збігається до точного розв’язку $x^* = -2$ після восьми кроків.

Таблиця 3.2 – Розв’язання нелінійного рівняння методом хорд

k	x_k	$x_{k+1} - x_k$	$E_k = x^* - x_k$
0	-2,600000000	0,200000000	0,600000000
1	-2,400000000	0,293401015	0,400000000
2	-2,106598985	0,083957573	0,106598985
3	-2,022641412	0,021130314	0,022641412
4	-2,001511098	0,001488561	0,001511098
5	-2,000022537	0,000022515	0,000022537
6	-2,000000022	0,000000022	0,000000022
7	-2,000000000	0,000000000	0,000000000

Приклад 3. Методом Ньютона (дотичних) знайти позитивний корінь

рівняння $x^4 - 2x - 4 = 0$ з точністю до 0,01.

Розв'язання

Тут $f(x) = x^4 - 2x - 4$, $f'(x) = 4x^3 - 2$, $f''(x) = 12x^2$. Так як $f(x)$ і $f''(x)$ при $x_0 = 1,7$ мають один і той же самий знак, а саме $f(1,7) = 0,952 > 0$ і $f''(1,7) > 0$, то скористуємося формулою $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$, де $f'(1,7) = 4 \cdot 1,7^3 - 2 = 17,652$. Тоді

$$x_1 = 1,7 - 0,952/17,652 = 1,646.$$

Застосуємо знову метод дотичних. Маємо $x_2 = x_1 - f(x_1)/f'(x_1)$ де $f(x_1) = f(1,646) = 0,048$, $f'(1,646) = 15,838$; значить

$$x_2 = 1,646 - 0,048/15,838 = 1,643.$$

Аналогічним чином знаходимо $f(1,643) = 0,004$; $f'(1,643) = 15,740$, тобто

$$x_3 = x_2 - f(x_2)/f'(x_2) = 1,643 - 0,004/15,740 = 1,6427.$$

Отже, шуканий корінь з точністю до 0,01 дорівнює 0,64.

Приклад 4. Знайти наближений розв'язок диференціального рівняння $y' = \frac{t-y}{2}$ на інтервалі $[0; 3]$ з початковою умовою $y(0) = 1$ за допомогою методу Тейлора для $N = 4$ і різної довжини кроку $h = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$.

Розв'язання

Продиференціюємо рівняння $y' = \frac{t-y}{2}$ за змінною t для отримання похідних вищого ступеня:

$$y'(t) = \frac{t-y}{2};$$

$$y^{(2)}(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{t-y}{2} \right) = \frac{1-y'}{2} = \frac{t - \frac{t-y}{2}}{2} = \frac{2-t+y}{4};$$

$$y^{(3)}(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{2-t+y}{4} \right) = \frac{0-1+y'}{4} = \frac{-1 + \frac{t-y}{2}}{4} = \frac{-2+t-y}{8};$$

$$y^{(4)}(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{-2+t-y}{8} \right) = \frac{-0+1-y'}{8} = \frac{1-\frac{t-y}{2}}{8} = \frac{2-t+y}{16}.$$

Для знаходження y_1 необхідно обчислити значення знайдених похідних у точці $(t_0; y_0) = (0; 1)$:

$$d_1 = y'(0) = \frac{0,0 - 1,0}{2} = -0,5;$$

$$d_2 = y^{(2)}(0) = \frac{2,0 - 0,0 + 1,0}{4} = 0,75;$$

$$d_3 = y^{(3)}(0) = \frac{-2,0 + 0,0 - 1,0}{8} = -0,375;$$

$$d_4 = y^{(4)}(0) = \frac{2,0 - 0,0 + 1,0}{16} = 0,1875.$$

Потім похідні $\{d_j\}$, $j = 1, \dots, 4$ підставляють до (2.13) з кроком, наприклад, таким, що дорівнює $h = \frac{1}{4}$ і розраховують значення y_1 :

$$y_1 = 1,0 + 0,25 \left(-0,5 + 0,25 \left(\frac{0,75}{2} + 0,25 \left(\frac{-0,375}{6} + 0,25 \left(\frac{0,1875}{24} \right) \right) \right) \right) = 0,8974915.$$

Отже, знайдена точка $(t_1; y_1)$ з координатами $(0,25; 0,8974915)$.

Значення y_2 визначають за допомогою обчислення похідних $\{d_j\}$, $j = 1, \dots, 4$ у точці $(t_1; y_1) = (0,25; 0,8974915)$:

$$d_1 = y'(0,25) = \frac{0,25 - 0,8974915}{2} = -0,3237458;$$

$$d_2 = y^{(2)}(0,25) = \frac{2,0 - 0,25 + 0,8974915}{4} = 0,6618729;$$

$$d_3 = y^{(3)}(0,25) = \frac{-2,0 + 0,25 - 0,8974915}{8} = -0,3309364;$$

$$d_4 = y^{(4)}(0,25) = \frac{2,0 - 0,25 + 0,8974915}{16} = 0,1654682;$$

$$y_2 = 0,8974915 + 0,25 \left(-0,3237458 + 0,25 \left(\frac{0,6618729}{2} + 0,25 + \right. \right. \\ \left. \left. + 0,25 \left(\frac{-0,3309364}{6} + 0,25 \left(\frac{0,1654682}{24} \right) \right) \right) \right) = 0,8364037.$$

Наступна точка $(t_2; y_2)$ має координати $(0,50; 0,8364037)$. Аналогічно обчислюють координати інших точок. У табл. 3.4 наведено значення y для вибірових абсцис і заданих кроків h .

Таблиця 3.4 – Результати розрахунків методом Тейлора з різним кроком

t_k	y_k		
	$h = 1$	$h = \frac{1}{2}$	$h = \frac{1}{4}$
0	1,0	1,0	1,0
0,125			
0,25			0,8974915
0,375			
0,50		0,8364258	0,8364037
0,75			0,8118696
1,00	0,8203125	0,8196285	0,8195940
1,50		0,9171423	0,9171021
2,00	1,1045125	1,1036826	1,1036408
2,50		1,3595575	1,3595168
3,00	1,6701860	1,6694308	1,6693928

Завдання до теми.

1. Знайти розв'язок нелінійного рівняння $e^x - 2 - x = 0$ на інтервалі $[-2,4; -1,6]$ за допомогою методу поділу навпіл.

2. Знайти розв'язок нелінійного рівняння $\ln(x) - 5 + x = 0$ на інтервалі $[2; 4]$ за допомогою методу Ньютона.

3. Знайти розв'язок нелінійного рівняння $x^3 - x + 2 = 0$ за допомогою методу хорд, починаючи з $x_0 = -1,5$ і $x_1 = -1,52$.

4. Знайти наближений розв'язок диференціальних рівнянь $y' = -ty$, $y' = y + 3t - t^2$ на інтервалі $[0; 2]$ з початковою умовою $y(0) = 1$ за допомогою методу Тейлора (для $N = 4$) з різною довжиною кроку $h = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$.

Примітка. Для виконання завдання необхідно мати уявлення про процедуру розв'язання нелінійних рівнянь та їх систем методами поділу навпіл,

хорд, Ньютона, виключення Гауса, Якобі, Гауса-Зейделя; уміти користуватися рекурентними формулами числових методів для розв'язання диференціальних рівнянь.

Контрольні питання

1. Наведіть класифікацію нелінійних рівнянь.
2. Що є розв'язком нелінійних рівнянь та їх систем?
3. Чим викликана необхідність застосування числових методів розв'язання нелінійних рівнянь та їх систем?
4. Із яких етапів складається знаходження коренів нелінійних рівнянь?
5. Що означає відділити та уточнити корені?
6. Як графічне відділення коренів уточнюється за допомогою обчислень? Які властивості функції однієї змінної при цьому використовують?
7. У чому сутність методу відділення коренів?
8. У чому сутність методу поділу навпіл?
9. У чому сутність методу хорд? Як вибирають початкове наближення?
10. У чому сутність методу Ньютона для розв'язку нелінійних рівнянь та їх систем? Як вибирають початкове наближення?
11. У чому сутність методу Зейделя для розв'язку систем нелінійних рівнянь?
12. Чому виникає необхідність застосування числових методів розв'язання диференціальних рівнянь?
13. Охарактеризувати числові методи розв'язання диференціальних рівнянь. Які методи називають однокроковими і багатокроковими?
14. Наведіть рекурентні формули методів Ейлера, Гюна, Тейлора, Рунге-Кутта.
15. Наведіть рекурентні формули методів Адамса-Бешфорса-Маултона та Мілна-Сімпсона.

Література: [2, с. 387–437; 7, с. 12–23; 8, с. 54–210, с. 461–536; 11, с. 96–101; 12, С. 50–59].

Практичне заняття № 4

Тема. Чисельне обчислення визначних інтегралів

Мета роботи: вивчення чисельних методів і набуття навичок обчислення визначних інтегралів.

Короткі теоретичні відомості

На практиці під час обчислення визначних інтегралів за відомою формулою Ньютона–Лейбниція виникають певні труднощі, що можуть бути пов'язані з двома основними причинами:

– вигляд функції $f(x)$ не допускає безпосереднього інтегрування, тобто первісну не можна виразити через елементарні (алгебраїчні та трансцендентні) функції;

– функція $f(x)$ задається таблицею (масивом значень) чи графіком. У цьому випадку поняття первісної втрачає сенс.

У подібних випадках застосовують різні методи наближеного (чисельного) інтегрування. Завдання чисельного інтегрування безперервної функції $f(x)$ на заданому відрізку $[a, b]$ полягає в обчисленні ряду значень підінтегральної функції на вказаному інтервалі. Оскільки визначний інтеграл можна трактувати як площу фігури, визначену ординатами a й b , віссю абсцис x і графіком підінтегральної функції $f(x)$. Суть чисельного інтегрування зводиться до розподілу заданого інтервалу на множину менших і знаходження сумарної площі S як сукупності елементарних площ, отриманих у результаті розподілу. Отже, цей підхід дозволяє наближено замінити визначний інтеграл інтегральною сумою:

$$S = S_1 + S_2 + \dots + S_n = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x,$$

де $\Delta x = x_{i+1} - x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Залежно від способу обчислення елементарної площі S_i отримують різні методи чисельного інтегрування. Найбільш розповсюдженими на практиці є:

– методи трапецій, Сімпсона, Гаусса, Ромберга та інші, що базуються на використанні так званих «квадратурних формул», що отримуються заміною $f(x)$ інтерполяційним поліномом;

– методи Монте-Карло, базуються на використанні статистичних моделей.

Метод прямокутників

Це найпростіший метод, що базується на заміні площі часткової криволінійної трапеції площею прямокутника:

$$S = \int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i), \quad (4.1)$$

де $f(x_i)$ – значення функції $f(x)$ в i -й лівій межі елементарного відрізка, n – кількість відрізків розподілу інтервалу $[a, b]$. Якщо використати праву межу елементарного відрізка, то отримаємо формулу правих прямокутників:

$$S = \int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i). \quad (4.2)$$

Точнішою є формула прямокутників, в якій використовується значення функції, обчислене у середніх точках елементарних відрізків:

$$S = \int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1} + h/2) \quad (4.3)$$

Унаслідок низької точності метод прямокутників та його модифікації практично не застосовується.

Метод трапецій

Суть даного методу полягає в заміні площі часткової криволінійної трапеції площею прямокутної трапеції – хордою, що стягує кінці інтервалів розподілу, і кроком розподілу:

$$S = \int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right) \quad (4.4)$$

Метод Сімпсона

Метод Сімпсона полягає в тому, що через кожні послідовні три точки проводиться парабола й обчислюється інтеграл від функції, вираженої у вигляді цієї параболи. Отже, площа часткової криволінійної трапеції замінюється площею, освіченою подвоєним інтервалом розподілу й параболою, що проходить через ці точки:

$$S = \int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} \left[f(x_0) + f(x_n) + 2(f(x_2) + f(x_4) + f(x_{n-2})) + 4(f(x_1) + f(x_3) + f(x_{n-1})) \right] \quad (4.5)$$

Оцінювання похибки квадратурних формул

Для оцінювання похибки методів інтегрування за квадратурними формулами можна скористатися співвідношеннями:

для методу прямокутників –

$$|R_{np}| \leq M \frac{(b-a)h}{2}, \quad (4.6)$$

де $M = \max_{x \in [a,b]} |f'(x)|$;

для методу трапецій –

$$|R_{mp}| \leq M \frac{(b-a)h^2}{12}, \quad (4.7)$$

де $M = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$;

для методу Сімпсона –

$$|R_c| \leq M \frac{(b-a)h^4}{180}, \quad (4.8)$$

де $M = \max_{x \in [a,b]} |f^{IV}(x)|$.

Для обчислення інтегралу із заданою точністю з формул (4.6–4.8) можна оцінити початковий крок інтегрування:

– для методу прямокутників – $h = \varepsilon$,

– для методу трапецій – $h = \sqrt{\varepsilon}$

– для методу Сімпсона – $h = \sqrt[4]{\varepsilon}$,

де ε – задана точність інтегрування.

Як видно з формул (4.6–4.8), оцінювання похибки методу інтегрування за формулами трапецій і Сімпсона можливе лише тоді, коли підінтегральна функція задана аналітично. На практиці можна використати спосіб, придатний для кожного з розглянутих методів. Інтеграл обчислюється двічі: перший раз інтеграл (позначений I_h) обчислюється під час розподілу інтервалу інтегрування $[a,b]$ на n частин (причому для методу Сімпсона n має бути парним); другий раз інтеграл (позначений $I_{h/2}$) обчислюється під час розбиття інтервалу інтегрування $[a,b]$ на $2n$ частин. Отримані значення I_h й $I_{h/2}$ порівнюються й перші десяткові знаки, що співпадають, вважаються вірними. У цьому випадку оцінити похибки обчислення можна за допомогою першої формули Рунге:

$$|R| = \frac{|I_h - I_{h/k}|}{k^p - 1}, \quad (4.9)$$

де k – величина, що визначається числом розбиття інтервалу інтегрування $[a,b]$ (тобто kn); p – порядок методу інтегрування. Ступінь кроку h , пропорційний величині R (похибка методу), називається порядком методу інтегрування. Наприклад, для оцінювання похибки обчислень формула (4.9) для методу трапецій запишеться так:

$$|R_{mp}| = \frac{|I_h - I_{h/2}|}{3}.$$

Після визначення значення R можна обчислити уточнене значення величини I_h :

$$I = I_h + R. \quad (4.10)$$

Формула (4.10) називається другою формулою Рунге.

Метод Монте-Карло

Розглянуті раніше методи чисельного інтегрування передбачають одержання суми, кількість додатків у якій визначається кількістю точок

розподілу інтервалу інтегрування. У задачах, де підінтегральна функція задана таблицею або вхідні дані носять випадковий характер, використовується метод Монте-Карло (метод статистико-ймовірносного моделювання).

Метод Монте-Карло полягає в тому, що розглядається деяка випадкова величина ζ , математичне сподівання якої дорівнює величині X :

$$M[\zeta] = X.$$

Проводиться серія n незалежних випробувань, у результаті яких одержується (генерується) послідовність n випадкових чисел $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$, за сукупністю цих значень близько визначається величина

$$M[\zeta] = (\zeta_1 + \zeta_2 + \dots + \zeta_n) / n \approx X.$$

Математичне сподівання послідовності випадкових чисел $\{\zeta_i\}$ буде тим точніше, чим більше об'єм вибірки (кількість випробувань) $n > 1000$. Тоді, вважаючи, що підінтегральна функція f безперервна на інтервалі інтегрування й вибравши в цьому інтервалі n випадкових точок ζ_i , можна вважати:

$$I = \int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(\zeta_i), \quad (4.11)$$

де $(b-a)$ – відрізок інтегрування; $\zeta_i, (i=1, 2, \dots, n)$ – випадкові точки, що належать інтервалу $[a, b]$. Отримати такі випадкові точки можна на підставі послідовності випадкових значень ζ_i , рівномірно розподілених в інтервалі $[0, 1]$. Для цього достатньо виконати перетворення $\zeta_i = a + (b-a) \cdot \zeta_i$.

Похибка методу Монте-Карло визначається похибкою генерації псевдовипадкової числової послідовності на комп'ютері, об'ємом і буде зменшуватися зі збільшенням кількості випробувань N за законом $\varepsilon \sim N^{-1/2}$.

Приклади виконання практичних робіт

Методичні вказівки щодо виконання практичної роботи № 4

Визначити значення визначного інтеграла $f(x) = 2x - 1$ на інтервалі $[1,5]$ з використанням формул прямокутників, трапецій і Сімпсона з $N = 5$ (N – кількість вузлів). Проаналізувати отримані результати.

Рішення

Розрахуємо інтеграл аналітично за формулою Ньютона–Лейбніца:

$$I = \int_1^5 (2x - 1) dx = \left(x^2 - x \right) \Big|_1^5 = 20.$$

Розрахуємо крок інтегрування для $N = 5$:

$$h = \frac{b - a}{N - 1} = \frac{5 - 1}{5 - 1} = 1.$$

Метод лівих прямокутників.

Розрахуємо значення функції $f(x)$ на інтервалі $[1,5]$ з кроком інтегрування $h = 1$.

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	1	3	5	7	9

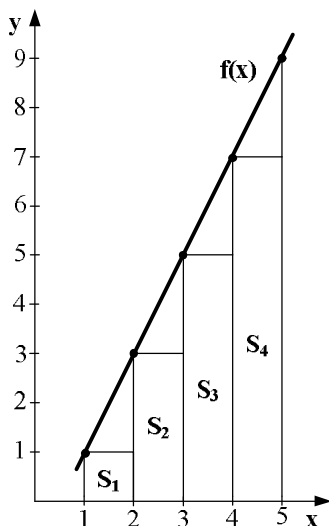


Рисунок 4.1 – Метод лівих прямокутників

Будуємо графік функції $f(x)$ та виділяємо необхідну кількість точок N . У результаті отримуємо чотири прямокутники, площа яких визначається за формулами:

$$S_1 = y_1 \cdot h = 1;$$

$$S_2 = y_2 \cdot h = 3;$$

$$S_3 = y_3 \cdot h = 5;$$

$$S_4 = y_4 \cdot h = 7.$$

Тоді сума отриманих площ буде рішенням визначного інтеграла:

$$I = \sum_i S_i = 1 + 3 + 5 + 7 = 16.$$

Метод правих прямокутників.

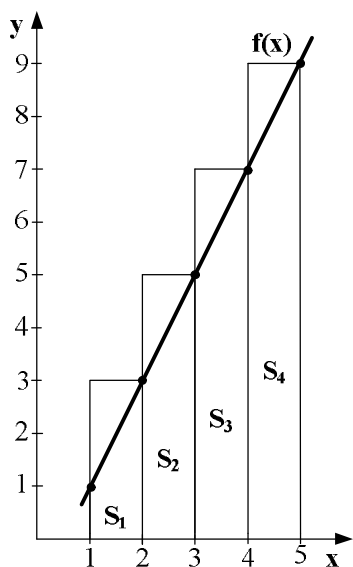


Рисунок 4.2 – Метод правих прямокутників

Визначаємо площу нових утворених прямокутників:

$$S_1 = y_2 \cdot h = 3;$$

$$S_2 = y_3 \cdot h = 5;$$

$$S_3 = y_4 \cdot h = 7;$$

$$S_4 = y_5 \cdot h = 9.$$

Тоді сума отриманих площ буде рішенням визначного інтеграла:

$$I = \sum_i S_i = 3 + 5 + 7 + 9 = 24.$$

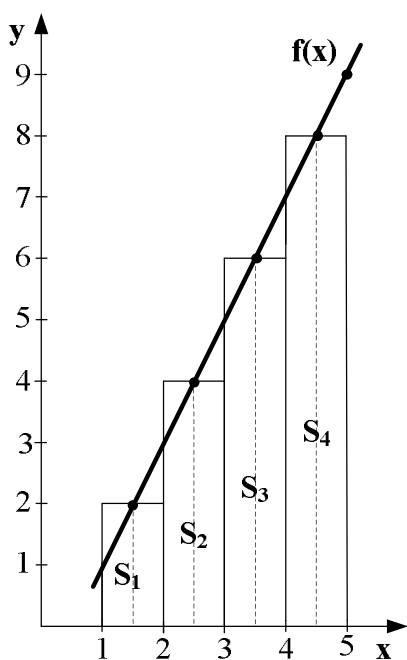


Рисунок 4.3 – Метод середніх прямокутників

Перерахуємо значення функції в середніх точках:

x	1,5	2,5	3,5	4,5
$f(x)$	2	4	6	8

Визначаємо площу нових утворених прямокутників:

$$S_1 = f(x_{1,5}) \cdot h = 2;$$

$$S_2 = f(x_{2,5}) \cdot h = 4;$$

$$S_3 = f(x_{3,5}) \cdot h = 6;$$

$$S_4 = f(x_{4,5}) \cdot h = 8.$$

Тоді сума отриманих площ буде рішенням визначного інтегралу:

$$I = \sum_i S_i = 2 + 4 + 6 + 8 = 20.$$

Тобто метод середніх прямокутників в даному випадку є найточнішим, оскільки отриманий результат збігається з аналітичним розв'язком.

Метод трапецій.

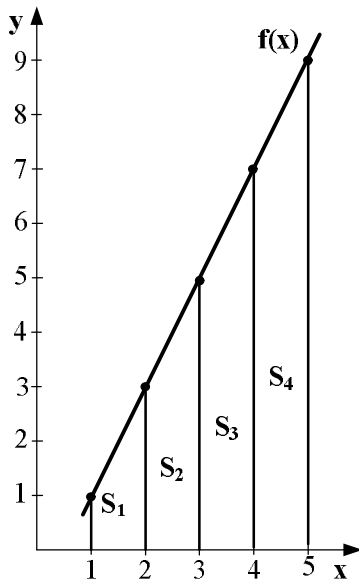


Рисунок 4.4 – Метод трапецій

Розрахуємо площу отриманих трапецій:

$$S_1 = \frac{h}{2}(f_1 + f_2) = \frac{1}{2}(1 + 3) = 2;$$

$$S_2 = \frac{h}{2}(f_2 + f_3) = \frac{1}{2}(3 + 5) = 4;$$

$$S_3 = \frac{h}{2}(f_3 + f_4) = \frac{1}{2}(5 + 7) = 6;$$

$$S_4 = \frac{h}{2}(f_4 + f_5) = \frac{1}{2}(7 + 9) = 8.$$

Тоді сума отриманих площ буде рішенням визначного інтеграла:

$$I = \sum_i S_i = 2 + 4 + 6 + 8 = 20.$$

Метод Сімпсона (метод парабол).

Розрахуємо площу отриманих фігур:

$$S_1 = \frac{h}{3}(f_1 + 4f_2 + f_3) = \frac{1}{3}(1 + 4 \cdot 3 + 5) = 6;$$

$$S_2 = \frac{h}{3}(f_3 + 4f_4 + f_5) = \frac{1}{3}(5 + 4 \cdot 7 + 9) = 14.$$

Тоді сума отриманих площ буде рішенням визначного інтеграла:

$$I = \sum_i S_i = 6 + 14 = 20.$$

Завдання до теми. Обчислити

значення визначного інтеграла на відрізку $[a, b]$ наближеним методом, оцінити

похибки методів і результатів. Порівняти отримані результати.

Завдання за варіантами наведені у таблиці 4.1.

Таблиця 4.1 – Завдання для розрахунку

1	$x^2 + 5x + 6; [-2;0]$	11	$3 - 7x^2; [0;1]$
2	$x^2 - 4; [-2;0]$	12	$1 - 8x^2; [0;4]$
3	$x^2 + 4x + 3; [-1;0]$	13	$x^2 + 2x + 1; [-1;0]$
4	$(x + 2)^2; [-2;0]$	14	$x^2 - 3x; [0;3]$
5	$x^2 + 7x + 12; [-4;0]$	15	$x^2 - 3x + 2; [0;5]$
6	$2x^2 + 4x + 7; [0;2]$	16	$x^2 - 5x + 6; [0;2]$
7	$9x^2 + 9x + 1; [0;5]$	17	$x^2 + 6x + 9; [-3;0]$
8	$8x^2 + 16x + 17; [0;3]$	18	$x^2 + 17; [0;4]$
9	$3x^2 + 5; [0;2]$	19	$1 - 5x^2; [0;5]$
10	$2x^2 - 15; [0;6]$	20	$3x - x^2; [-1;3]$

Контрольні питання

1. Чому виникає необхідність використання чисельних методів інтегрування?
2. У чому суть чисельних методів інтегрування?
3. Пояснити, на чому заснований метод прямокутників. Яким чином можна обчислити площі часткових прямокутників?
4. У чому суть методу трапецій?
5. У чому суть методу Сімпсона?
6. Як пов'язані точність інтегрування та крок інтегрування для методів прямокутників, трапецій, Сімпсона?
7. Як оцінити похибку обчислення інтеграла?
8. У чому полягає оцінювання похибки обчислень за формулами Рунге?
9. У чому полягає суть методу Монте-Карло?

Література: [2, с. 387–437; 7, с. 12–23; 8, с. 54–210, с. 461–536; 11, с. 96–101; 12, с. 50–59].

Практичне заняття № 5

Тема. Наближене розв'язання диференціальних рівнянь та їх систем

Мета роботи: вивчення чисельних методів і набуття навичок розв'язання диференціальних рівнянь

Короткі теоретичні відомості

Розроблені аналітичні методи розв'язання диференціальних рівнянь мають обмежену кількість прикладних задач. Тому виникає необхідність у використанні чисельних методів їх розв'язання. В основу чисельних методів розв'язання диференціальних рівнянь покладено розклад функції у ряд Тейлора навколо точки x_0 :

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{1}{2}y''(x_0) + \dots + \frac{1}{i!}h^i y^{(i)}(x_0),$$

де h – відстань (крок) між точкою x_0 й точкою $x_1 = x_0 + h$, у якій обчислюється рішення. Причому в різних методах ураховується різна кількість членів розкладання, що й визначає точність обчислень.

Для розв'язання систем диференціальних рівнянь використовуються методи, що є узагальненням методів розв'язання одного диференціального рівняння першого порядку.

Метод Ейлера

У цьому методі для оцінювання наступної точки функції $\tilde{y} = f(x)$ використовується лише один лінійний член у формулі Тейлора, тобто

$$y_1 = y(x_0 + h) = y_0 + hf(x_0, y_0),$$

де $f(x_0, y_0)$ – права частина диференціального рівняння $y' = f(x, y)$. Користуючись значенням y_1 з розкладу $y(x)$ у h -окілу точки $x_1 = x_0 + h$, одержують значення:

$$y_2 = y(x_0 + 2h) = y_1 + hf(x_1, y_1).$$

Цей процес розповсюджується на такі кроки:

$$y_{i+1} = y(x_0 + ih) = y_i + hf(x_i, y_i) \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.1)$$

Диференціальне рівняння першого порядку за методом Ейлера обчислюється за формулою (6.1). Для системи диференціальних рівнянь першого порядку обчислення за методом Ейлера проводять за формулою (5.2):

$$Y_{j(i+1)} = Y_{ji} + hF_j(x_i, Y_{ji}). \quad (5.2)$$

Метод Ейлера має велику похибку Rh , і, за рахунок систематичного накопичування помилок, часто буває нестійкий (малі локальні помилки призводять до значного збільшення глобальної помилки). Цей метод можна вдосконалити різними засобами, що дозволяють збільшити його точність та досягти Rh^3 . Однак на практиці метод Ейлера та його модифікації використовують у край рідко.

Ще більша точність може бути досягнута під час обчислення вищих порядків похідних і збереженні більшої кількості членів ряду Тейлора.

Метод Рунге-Кутта

Метод Рунге-Кутта – найбільш розповсюджений метод розв’язання диференціальних рівнянь та їх систем, що забезпечує більшу швидкість розв’язання за рахунок більшої точності обчислень на кожному кроці, меншу схильність до виникнення нестійкого рішення. Точність цього методу оцінюється величиною Rh^5 . Уточнення досягається за рахунок спеціального підбору координат чотирьох точок, у яких обчислюється перша похідна функції $f(x, y)$. Існує ряд засобів знаходження цих точок. Найчастіше використовують класичний метод четвертого порядку. Алгоритм реалізації методу Рунге-Кутта 4-го порядку з постійним кроком для диференціального рівняння першого порядку полягає в циклічному обчисленні y_{i+1} на кожному $i+1$ кроці за формулами:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i), \\ k_2 &= f(x_i + h/2, y_i + k_1/2), \\ k_3 &= f(x_i + h/2, y_i + k_2/2), \\ k_4 &= f(x_i + h, y_i + k_3), \\ y_{i+1} &= y_i + h/6(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \end{aligned} \quad (5.3)$$

або для системи диференціальних рівнянь n -ого порядку:

$$\begin{aligned}
k_{1j} &= F_j(x_i, Y_{ji}), \\
k_{2j} &= F_j(x_i + h/2, Y_{ji} + k_{1j}/2), \\
k_{3j} &= F_j(x_i + h/2, Y_{ji} + k_{2j}/2), \\
k_{4j} &= F_j(x_i + h, Y_{ji} + k_{3j}), \\
Y_{j(i+1)} &= Y_{ji} + h/6(k_{1j} + 2k_{2j} + 2k_{3j} + k_{4j}),
\end{aligned}
\tag{5.4}$$

де j – номер диференціального рівняння.

Якщо вимагається отримати розв'язок із заданою точністю у вигляді кривих, що сильно відрізняються крутизною, використовуються методи з автоматичною зміною кроку h (у розглянутих раніше методах $h = \text{const}$). Автоматична зміна кроку в ході розв'язання диференціального рівняння (системи) забезпечує зменшення загальної кількості кроків у декілька разів, різко зменшує ймовірність виникнення числової нестійкості, дає рівномірніше розміщення точок графіка кривих (розв'язків) з тією ж похибкою $R h^5$.

Метод Рунге-Кутта з автоматичною зміною кроку полягає в тому, що після обчислення y_{i+1} з кроком h усі обчислення проводяться повторно з кроком $h/2$. Отриманий результат y_{i+1}^* порівнюється з y_{i+1} . Якщо $|y_{i+1} - y_{i+1}^*| < \varepsilon$, обчислення продовжуються з кроком h , у іншому випадку крок потрібно зменшити. Якщо вказана нерівність не виконується, крок, навпаки, необхідно збільшити.

Оцінювання похибки чисельних методів розв'язання диференціальних рівнянь

Для оцінювання похибки методів розв'язання диференціальних рівнянь з постійним кроком h можна скористатися першою формулою Рунге:

$$|R| = \frac{|y_h(x) - y_{h/k}(x)|}{k^p - 1},
\tag{5.5}$$

де k – величина, що визначається виразом k^n (n – початкове число розбиття інтервалу $[a, b]$); p – порядок методу; $y_h(x)$ – чисельне розв'язання диференціального рівняння в точці x , отримане з кроком h ; $y_{h/k}(x)$ – чисельне розв'язання того самого рівняння з кроком h/k .

Після визначення значення R можна обчислити уточнене значення за другою формулою Рунге:

$$y(x) = y_h + R. \quad (5.6)$$

Приклади виконання практичних робіт

Методичні вказівки щодо виконання практичної роботи № 5

Розв'язати задачу Коші для функції $y' = f(x, y) = y(1-x)$ на інтервалі $0,1$ з кількістю розподілу $n = 5$, початкові умови $x_0 = 0$, $y_0 = 1$. Еталонна

крива описується виразом $y = e^{\frac{1-x^2}{2}}$.

Рішення

Знайдемо розв'язання задачі Коші за допомогою методу Ейлера.

Визначимо крок інтегрування:

$$h = \frac{b-a}{5} = \frac{1-0}{5} = 0,2.$$

Знайдемо всі точки функції $y' = f(x, y) = y(1-x)$ згідно з алгоритмом знаходження:

$$x_i = x_{i-1} + h; \quad y_i = y_{i-1} + hf(x, y):$$

– перша точка:

$$x_1 = x_0 + h = 0 + 0,2 = 0,2;$$

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 0,2 \cdot 1 = 1,2,$$

де $f(x_0, y_0) = f(0; 1) = 1(1-0) = 1$;

– друга точка:

$$x_2 = x_1 + h = 0,2 + 0,2 = 0,4$$

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1,2 + 0,2 \cdot 0,96 = 1,392,$$

де $f(x_1, y_1) = f(0,2; 1,2) = 1,2(1-0,2) = 0,96$.

– третя точка:

$$x_3 = x_2 + h = 0,4 + 0,2 = 0,6$$

$$y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = 1,392 + 0,2 \cdot 0,835 = 1,559,$$

де $f(x_2, y_2) = f(0,4; 1,392) = 1,392(1-0,4) = 0,835$;

– четверта точка:

$$x_4 = x_3 + h = 0,6 + 0,2 = 0,8;$$

$$y_4 = y_3 + hf(x_3, y_3) = 1,559 + 0,2 \cdot 0,624 = 1,684,$$

$$\text{де } f(x_3, y_3) = f(0,6; 1,559) = 1,559(1 - 0,6) = 0,624;$$

– п'ята точка:

$$x_5 = x_4 + h = 0,8 + 0,2 = 1;$$

$$y_5 = y_4 + hf(x_4, y_4) = 1,684 + 0,2 \cdot 0,337 = 1,751,$$

$$\text{де } f(x_4, y_4) = f(0,8; 1,684) = 1,684(1 - 0,8) = 0,337.$$

Знайдемо розв'язок задачі Коші методом Рунге-Куты, для якого алгоритм знаходження точок такий:

$$k_1 = f(x_i, y_i);$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right);$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right);$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3);$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Знайдемо всі точки функції $y' = f(x, y) = y(1 - x)$

– перша точка:

$$x_1 = x_0 + h = 0 + 0,2 = 0,2;$$

$$k_1 = f(x_0, y_0) = f(0; 1) = 1(1 - 0) = 1;$$

$$k_2 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{k_1}{2}\right) = f\left(0 + \frac{0,2}{2}; 1 + \frac{1}{2}\right) = f(0,1; 1,5) = 1,5(1 - 0,1) = 1,35;$$

$$k_3 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{k_2}{2}\right) = f\left(0 + \frac{0,2}{2}; 1 + \frac{1,35}{2}\right) = f(0,1; 1,675) = 1,675(1 - 0,1) = 1,508;$$

$$k_4 = f(x_0 + h; y_0 + k_3) = f(0 + 0,2; 1 + 1,508) = f(0,2; 2,508) = 2,508(1 - 0,2) = 2,006;$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1 + \frac{0,2}{6}(1 + 2 \cdot 1,35 + 2 \cdot 1,508 + 2,006) = 1,291;$$

– друга точка:

$$x_2 = x_1 + h = 0,2 + 0,2 = 0,4;$$

$$k_1 = f(x_1, y_1) = f(0,2; 1,291) = 1,291(1 - 0,2) = 1,033;$$

$$k_2 = f\left(x_1 + \frac{h}{2}; y_1 + \frac{k_1}{2}\right) = f\left(0,2 + \frac{0,2}{2}; 1,291 + \frac{1,033}{2}\right) = f(0,3; 1,807) = 1,807(1 - 0,3) = 1,265;$$

$$k_3 = f\left(x_1 + \frac{h}{2}; y_1 + \frac{k_2}{2}\right) = f\left(0,2 + \frac{0,2}{2}; 1,291 + \frac{1,265}{2}\right) = f(0,3; 1,923) = 1,923(1 - 0,3) = 1,346;$$

$$k_4 = f(x_1 + h; y_1 + k_3) = f(0,2 + 0,2; 1,291 + 1,346) = f(0,4; 2,637) = 2,637(1 - 0,4) = 1,582;$$

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1,291 + \frac{0,2}{6}(1,033 + 2 \cdot 1,265 + 2 \cdot 1,346 + 1,582) = 1,552;$$

– третья точка:

$$x_3 = x_2 + h = 0,4 + 0,2 = 0,6;$$

$$k_1 = f(x_2, y_2) = f(0,4; 1,552) = 1,552(1 - 0,4) = 0,931;$$

$$k_2 = f\left(x_2 + \frac{h}{2}; y_2 + \frac{k_1}{2}\right) = f\left(0,4 + \frac{0,2}{2}; 1,552 + \frac{0,931}{2}\right) = f(0,5; 2,018) = 2,018(1 - 0,5) = 1,009;$$

$$k_3 = f\left(x_2 + \frac{h}{2}; y_2 + \frac{k_2}{2}\right) = f\left(0,4 + \frac{0,2}{2}; 1,552 + \frac{1,009}{2}\right) = f(0,5; 2,056) = 2,056(1 - 0,5) = 1,028;$$

$$k_4 = f(x_2 + h; y_2 + k_3) = f(0,4 + 0,2; 1,552 + 1,028) = f(0,6; 2,58) = 2,58(1 - 0,6) = 1,032;$$

$$y_3 = y_2 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1,552 + \frac{0,2}{6}(0,931 + 2 \cdot 1,009 + 2 \cdot 1,028 + 1,032) = 1,753;$$

– четвертая точка:

$$x_4 = x_3 + h = 0,6 + 0,2 = 0,8;$$

$$k_1 = f(x_3, y_3) = f(0,6; 1,753) = 1,753(1 - 0,6) = 0,701;$$

$$k_2 = f\left(x_3 + \frac{h}{2}; y_3 + \frac{k_1}{2}\right) = f\left(0,6 + \frac{0,2}{2}; 1,753 + \frac{0,701}{2}\right) =$$

$$= f(0,7; 2,104) = 2,104(1 - 0,7) = 0,631;$$

$$k_3 = f\left(x_3 + \frac{h}{2}; y_3 + \frac{k_2}{2}\right) = f\left(0,6 + \frac{0,2}{2}; 1,753 + \frac{0,631}{2}\right) =$$

$$= f(0,7; 2,069) = 2,069(1 - 0,7) = 0,621;$$

$$k_4 = f(x_3 + h; y_3 + k_3) = f(0,6 + 0,2; 1,753 + 0,621) =$$

$$= f(0,8; 2,374) = 2,374(1 - 0,8) = 0,475;$$

$$y_4 = y_3 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) =$$

$$= 1,753 + \frac{0,2}{6}(0,701 + 2 \cdot 0,631 + 2 \cdot 0,621 + 0,475) = 1,876;$$

– п'ята точка:

$$x_5 = x_4 + h = 0,8 + 0,2 = 1;$$

$$k_1 = f(x_4, y_4) = f(0,8; 1,876) = 1,876(1 - 0,8) = 0,375;$$

$$k_2 = f\left(x_4 + \frac{h}{2}; y_4 + \frac{k_1}{2}\right) = f\left(0,8 + \frac{0,2}{2}; 1,876 + \frac{0,375}{2}\right) =$$

$$= f(0,9; 2,064) = 2,064(1 - 0,9) = 0,206;$$

$$k_3 = f\left(x_4 + \frac{h}{2}; y_4 + \frac{k_2}{2}\right) = f\left(0,8 + \frac{0,2}{2}; 1,876 + \frac{0,206}{2}\right) =$$

$$= f(0,9; 1,979) = 1,979(1 - 0,9) = 0,198;$$

$$k_4 = f(x_4 + h; y_4 + k_3) = f(0,8 + 0,2; 1,876 + 0,198) =$$

$$= f(1; 2,074) = 2,074(1 - 1) = 0;$$

$$y_5 = y_4 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) =$$

$$= 1,876 + \frac{0,2}{6}(0,375 + 2 \cdot 0,206 + 2 \cdot 0,198 + 0) = 1,915.$$

Нижче наведено порівняльну таблицю отриманих результатів розрахунку методом Ейлера, Рунге-Кута та для еталонної кривої.

Таблиця 5.1 – Порівняння отриманих результатів

x_i		0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
Метод Ейлера	y_i	1	1,2	1,392	1,559	1,684	1,751
Метод Рунге-Кута		1	1,291	1,552	1,753	1,876	1,915
Еталонна крива		1	1,291	1,552	1,753	1,876	1,915

Отже, із двох розглянутих методів точнішим є метод Рунге-Кутта. Метод Ейлера має велику похибку, оскільки під час розрахунку накопичуються незначні неточності.

Примітка: для виконання завдання необхідно мати уявлення про процедуру розв'язання диференціальних рівнянь та їх систем методами Ейлера, Рунге-Кутта, уміти оцінювати похибки чисельних методів розв'язання диференціальних рівнянь.

Завдання до теми. Розв'язати задачу Коші: $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ на відрізьку $[a, b]$, використовуючи чисельні методи. Зробити оцінку похибки обчислень і порівняти (оцінити) точність отриманих результатів з еталонною кривою.

Варіанти завдань наведені в таблиці 5.1.

Контрольні питання

1. Що називається диференціальним рівнянням n -го порядку?
2. Сформулюйте задачу Коші.
3. Що є розв'язанням диференціального рівняння?
4. Чому виникає необхідність застосовувати чисельні методи розв'язання диференціальних рівнянь?
5. У чому відміна чисельних методів розв'язання диференціальних рівнянь?
6. У чому суть методу Ейлера та його модифікацій?
7. Розробити й намалювати схему алгоритму, що реалізує метод Ейлера
8. У чому сутність методу Рунге-Кутта?
9. У яких випадках краще використовувати чисельні методи розв'язання диференціальних рівнянь з постійним і змінним кроком?
10. Розробити схему алгоритму, що реалізує метод Рунге-Кутта.
11. Як оцінюється похибка різноманітних чисельних методів розв'язання диференціальних рівнянь?

Література: [12, с. 223-295; 13, с. 95-203; 14, с. 5-101; 15, с. 425-446; 17, с. 51-176; 19, с. 127-128, 148-152; 20, с. 5-88].

2 КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ ЗНАНЬ СТУДЕНТІВ

Види занять	Максимальна сума балів
Лекції	18
Практичні заняття, лабораторні роботи: виконання, захист	32
Поточний контроль: (змістовий модуль № 1 – 10 балів; змістовий модуль № 2 – 10 балів; змістовий модуль № 3 – 10 балів; самостійна робота, реферати – 20 балів)	50
Усього	100

Шкала оцінювання: національна та ECTS

Сума балів за всі види навчальної діяльності	Оцінка ECTS	Оцінка за національною шкалою	
		Для іспиту, курсового проекту (роботи), практики	Для заліку
90 – 100	A	Відмінно	зараховано
82-89	B	Добре	
74-81	C		
64-73	D	Задовільно	
60-63	E		
35-59	FX	Незадовільно з можливістю повторного складання	не зараховано з можливістю повторного складання
0-34	F	Незадовільно з обов'язковим повторним вивченням навчальної дисципліни	не зараховано з обов'язковим повторним вивченням навчальної дисципліни

СПИСОК ЛИТЕРАТУРИ

1. Бронштейн И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. – М. : Наука, 1981. – 720 с.
2. Численные методы : учебное пособие для студентов физ.-мат. специальности пед. институтов / [В. М. Заварыкин и др.]. – М. : Просвещение, 1990. – 340 с.
3. Джеффрис Г. Методы математической физики / Г. Джеффрис, Б. Свирлс. – М. : Издательство «МИР», 1970. – 352 с.
4. Ясницкий Л. Н. Введение в искусственный интеллект. – М. : Академия, 2008. – 176 с.
5. Дьяконов В. П. MatCad 2001 : учебный курс / В. П. Дьяконов. – СПб. : Питер, 2001. – 624 с.
6. Яхьяева Г. Э. Нечеткие множества и нейронные сети / Г. Э. Яхьяева. – М. : Бином, 2006 – 316 с.
7. Кетков Ю. Л. MatLab 7: программирование, численные методы / Ю. Л. Кетков, А. Ю. Кетков, М. М. Шульц. – СПб. : БХВ-Петербург, 2005. – 752 с.
8. Кирьянов Д. В. MatCad 12 / Д. В. Кирьянов. – СПб. : БХВ-Петербург, 2005. – 576 с.
9. Исследование операций: / [Х. Майзер, Н. Зйджин, Р. Тролл и др.], Под ред. Дж. Моудера, С. Злмаграби. – М. : Мир, 1981. – 422 с.
10. Турчак Л. И. Основы численных методов : учеб. пособие. / Л. И. Турчак. – М. : Наука, 1987. – 157 с.
11. Хемминг Р. В. Численные методы для научных работников и инженеров / Р. В. Хемминг. – М. : Наука, 1972. – 400 с.
12. Хинчин А.Я. Восемь лекций по математическому анализу / А. Я. Хинчин. – М. : Наука, 1977. – 280 с.

Таблиця А. 1 – Значення експериментальних вимірювань

№ варіанта									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1,25	35,81	49,65	0,43	0,98	37,86	0,32	0,66	0,82	49,04
1,19	47,59	53,13	0,42	0,91	42,46	0,41	0,56	1,14	58,19
0,86	47,81	35,24	0,48	1,18	53,44	0,41	0,43	1,21	44,24
1,04	42,56	41,02	0,43	0,93	58,23	0,47	0,54	1,00	51,62
0,99	39,41	52,96	0,61	1,11	56,10	0,59	0,54	1,03	48,80
0,96	37,78	59,53	0,43	1,04	40,38	0,55	0,62	0,81	54,96
1,11	52,95	46,08	0,67	1,07	53,99	0,41	0,66	1,07	53,46
1,26	44,16	42,42	0,61	1,00	59,91	0,36	0,58	1,28	58,05
1,25	35,39	55,75	0,65	1,09	55,13	0,31	0,48	0,95	53,72
1,00	52,45	55,87	0,42	1,04	44,85	0,58	0,50	1,16	40,78
1,25	54,85	44,04	0,65	0,91	36,50	0,50	0,47	0,79	54,53
0,82	39,85	38,87	0,68	0,92	35,26	0,52	0,56	1,04	57,63
0,87	41,83	43,09	0,41	1,05	43,77	0,45	0,67	1,21	48,98
0,97	36,18	43,87	0,50	1,01	52,86	0,41	0,61	1,16	58,00
1,26	51,90	43,63	0,66	1,11	45,46	0,39	0,51	1,22	50,50
0,98	37,31	48,58	0,53	0,79	38,45	0,56	0,56	0,80	44,30
0,79	46,47	40,61	0,55	0,85	55,96	0,36	0,56	1,26	54,00
0,81	55,99	58,67	0,59	1,22	53,71	0,55	0,49	0,79	46,21
	41,67	39,10	0,68		56,27	0,29	0,48		39,19
	53,96	55,99	0,46		57,82	0,55	0,42		43,18
		43,21	0,66			0,43	0,49		
		46,14	0,55			0,30	0,54		
		49,12	0,61			0,55	0,47		
		54,09	0,49			0,49	0,52		
		57,96	0,44			0,35	0,49		
			0,66				0,40		
			0,58				0,43		

Таблиця Б.1 – Коефіцієнти і вільні члени СЛАР

№ вар.	i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	b_i
1	1	-3	0,5	0,5	-56,5
	2	0,5	-6	0,5	-100
	3	0,5	0,5	-3	-210
2	1	0,63	0,05	0,15	0,34
	2	0,15	0,10	0,71	0,42
	3	0,03	0,34	0,10	0,32
3	1	-0,20	1,60	-0,10	0,30
	2	-0,30	0,10	-1,50	0,40
	3	1,20	-0,20	0,30	-0,60
4	1	0,20	0,44	0,81	0,74
	2	0,58	-0,29	0,05	0,02
	3	0,05	0,34	0,10	0,32
5	1	6,36	11,75	10	-41,40
	2	7,42	19,03	11,75	-49,49
	3	5,77	7,48	6,36	-27,67
6	1	-9,11	1,02	-0,73	-1,25
	2	7,61	6,25	-2,32	2,33
	3	-4,64	1,13	-8,88	-3,75
7	1	1,02	-0,73	-9,11	-1,25
	2	6,25	-2,32	7,62	2,33
	3	1,13	-8,88	4,64	-3,75
8	1	0,06	0,92	0,03	-0,82
	2	0,99	0,01	0,07	0,66
	3	1,01	0,02	0,99	-0,98
9	1	0,62	0,81	0,77	-8,18
	2	0,03	-1,11	-1,08	0,08
	3	0,97	0,02	-1,08	0,06
10	1	0,63	-0,37	1,76	-9,29
	2	0,90	0,99	0,05	0,12
	3	0,13	-0,95	0,69	0,69
11	1	0,98	8,88	-0,24	1,36
	2	0,16	-0,44	-0,88	-1,27
	3	9,74	-10,00	1,71	-5,31

№ вар.	i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	b_i
12	1	0,21	-0,94	-0,94	-0,25
	2	0,98	-0,19	0,93	0,23
	3	0,87	0,87	-0,14	0,33
13	1	0,66	0,44	0,22	-0,58
	2	1,54	0,74	1,54	-0,32
	3	1,42	1,42	0,86	0,83
14	1	1,2357	2,1742	-5,4834	-2,0735
	2	6,0696	-6,2163	-4,6921	-4,8388
	3	3,4873	6,1365	-4,7483	4,8755
15	1	6,1	2,2	1,2	16,55
	2	2,2	5,5	-1,5	10,55
	3	1,2	-1,5	7,2	16,8
16	1	0,15	2,11	30,75	-26,38
	2	0,64	1,21	2,05	1,01
	3	3,21	1,53	1,04	5,23
17	1	1,02	-0,25	-0,3	0,515
	2	-0,41	1,13	-0,15	1,555
	3	-0,25	-0,14	1,21	2,78
18	1	1	2	6	23
	2	2	4	-1	7
	3	5	-1	-1	0
19	1	1	1	1	-2
	2	1	-1	2	-7
	3	2	3	-1	1
20	1	1	-1	3	1
	2	2	3	-1	7
	3	1	9	-11	11

Таблиця В.1 – Вихідні дані для розв'язання задачі Коші

k	$f(x, y)$	x_0	y_0	a	b	$y(x)$
1	$\frac{(xy^2 + x)}{(y - x^2y)}$	0	1	3	6	$\frac{\sqrt{-x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 + 1}}$
2	$\frac{(1 - 2x)}{y^2}$	0	1	0	4	$\sqrt{-3x^2 + 3x + 1}$
3	$\frac{1 - x^2}{xy}$	1	1	-1	4	$\frac{1}{xe^2} - \frac{x^2}{2}$
4	$\frac{1 + y^2}{1 + x^2}$	1	0	0	2	$\frac{x - 1}{x + 1}$
5	$4x - 2y$	1	0	1	3	$2x - e^{2-2x} - 1$
6	$2x - y$	0	0	1	4	$2(x + e^{-x} - 1)$
7	$\frac{y^2}{(2x + 1)}$	0	1	0	2	$\frac{-2}{\log(2x - 1) - 2}$
8	$\frac{1 + y}{x(x + 1)}$	1	1	2	4	$\frac{x(x + \log(x) + 1)}{x + 1}$
9	$\frac{y + yx^2 - x^2}{x(1 + x^2)}$	1	1	1	2	$0,25x(-4\operatorname{tg}^{-1}(x) + 4 + \pi)$
10	$3x - 2y + 5$	1	0	0	5	$0,25(6x - 13e^{2-2x} + 7)$
11	$\frac{xy^2}{5x}$	1	1	0	3	$\frac{-15}{x^3 - 16}$
12	$-\frac{y}{x}$	1	-2	1	2	$\frac{-2}{x}$
13	$2(x^2 + y)$	0	1	0	1	$0,5(-2x^2 - 2x + 3e^{2x} - 1)$
14	$y + x^2$	1	0	1	3	$-x^2 - 2x + 5e^{x-1} - 2$

15	$\frac{(5x+2)}{y}$	0	1	0	1	$\sqrt{5x^2 + 4x + 1}$
16	$\frac{5x}{y^2}$	0	1	0	1	$\sqrt[3]{\frac{15x^2}{2} + 1}$
17	$y + 5x^2$	0	0	1	3	$5(-x^2 - 2x + 2e^x - 2)$
18	$0,7y + 2.5x$	1	1	0	2	$-3,57x + 4,8e^{0,7x} - 5,1$
19	$\frac{y-1}{x^2}$	1	0	-3	0	$1 - e^{1-\frac{1}{x}}$
20	$\frac{1}{2xy}$	1	1	0	2	$\sqrt{\log(x)+1}$

Методичні вказівки щодо практичних занять з навчальної дисципліни «Математичні методи моделювання» для студентів денної та заочної форми навчання спеціальності 141 – «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» (у тому числі скорочений термін навчання)

Укладачі: старш. викл. О. А. Хребтова,
асист. В. Г. Ковальчук

Відповідальний за випуск зав. кафедри САУЕ Родькін Д. Й.

Підп. до др. _____. Формат 60x84 1/16. Папір тип. Друк ризографія.
Ум. друк. арк. _____. Наклад _____ прим. Зам. № _____. Безкоштовно.

Видавничий відділ
Кременчуцького національного університету
імені Михайла Остроградського
вул. Першотравнева, 20, м. Кременчук, 39600