Кременчугский национальный университет
имени Михаила Остроградского

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Математические методы вычислений на ЭВМ

А.П. Черный, д.т.н., профессор
http:\\saue.kdu.edu.ua

Структура учебной дисциплины

Модуль 1 **«Численные методы решения линейных и нелинейных уравнений и их систем»**

- Тема 1. Элементы теории погрешностей.
- Тема 2. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений.
- Тема 3. Численные методы решения нелинейных уравнений и их систем.
- Тема 4. Приближение функций.
- Тема 5. Методы оптимизации.

Модуль 2 **«Численные методы дифференцирования и интегрирования»**

- Тема 6. Численное дифференцирование и интегрирование функций одной переменной.
- Тема 7. Численные методы решения дифференциальных уравнений и их систем.

Литературные источники

Основные теоретические

- В.М. Заварыкин и др. Численные методы: Учебное пособие для студентов пед. институтов.- М.:Просвещение, 1990
- Турчак Л.И. Основы численных методов: Учеб. Пособие. - М.: «Наука»,1987.

Дополнительные

- А.Е. Мудров Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран, Паскаль.- Томск: МП “РАСКО”,1991
- В.П. Дьяков. Справочник по алгоритмам и программам на языке Бейсик на ПЭВМ. Справочник.- М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. Лит., 1989
- Семененко М.. Математическое моделирование в MathCad. Альтекс-А. 2003.
- Бидасюк Ю.М.. Mathcad для студента. Вильямс, 2006.
- Фриск В. В.. Mathcad. Расчеты и моделирование цепей на ПК. Москва: Солон-Пресс, 2006.
- Охорзин В.А.. Прикладная математика в системе MATHCAD Учебное пособие. 3-е изд. СПб.: Лань, 2009, 352с.
- Охорзин В.А.. Компьютерное моделирование в системе Mathcad. М.: Финансы и статистика, 2006, 144с.

ЛЕКЦИЯ 1.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Общие характеристики вычислительных процессов

Численные методы — это математический инструментарий, с помощью которого математическая задача формулируется в виде, удобном для решения на компьютере.

Численные методы:

- предусматривают проведение большого количества рутинных арифметических вычислений с помощью рекурсивных соотношений, которые используются для организации итераций, то есть повторяемых циклов вычислений с измененными начальными условиями для улучшения результата;
- направлены на локальное упрощение задачи, когда, например, используемые нелинейные зависимости линеаризуются с помощью своих вычисленных производных или производные заменяют разностными аппроксимациями;
- значительно зависят от близости начального приближения (или нескольких приближений), необходимого для начала вычислений к решению, от свойств нелинейных функций, которые используются в математических моделях, на них дифференцируемость, на скорость изменения функций и др.

Численные методы характеризуются:

- разной скоростью сходимости, то есть числом итераций, выполнение которых необходимое для получения заданной точности решения;
- разной устойчивостью, то есть сохранением достоверности решения во время дальнейших итераций.
- разной точностью получаемого решения в случае выполнения одинакового числа итераций или циклов вычислений.

Численные методы различаются:

- по широте и легкости применения, то есть по степени своей универсальности и инвариантности для решения разных математических задач;
- по сложности их программирование;
- по возможностям использования в случае их реализации имеющихся библиотек функций и процедур, созданных для поддержки разных алгоритмических языков;
- по степени чувствительности к плохо обусловленным (или некорректным) математическим задачам, когда малым изменениям входных данных могут отвечать большие изменения решения.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Классификация погрешностей

1. Погрешность задачи (неустранимая погрешность).

Она связана с приближенным характером исходной модели (в частности, с невозможностью учесть все факторы в процессе изучения моделированного явления). Кроме того, параметрами математического описания модели есть приближенные числа (например, из-за невозможности выполнения абсолютно точных измерений). Для вычислителя погрешность задачи считают неустранимой (безусловной), хотя постановщик задачи иногда может ее изменить.

Неустранимую погрешность разделяют на две части:

- Погрешность исходных данных – является следствием неточности задания числовых данных, которые входят в математическое описание задачи;
- Погрешность математической модели – следствие несоответствия математического описания задачи к реальности.

2. Погрешность метода.

Эта погрешность связана с техникой решения сформулированной математической задачи. Она появляется вследствие замены исходной математической модели другой или конечной последовательность других, например, линейных моделей. В случае создания численных методов имеется возможность отслеживания таких погрешностей и сведения их к как угодно малому уровню. Поэтому погрешность метода является устранимой (условной).

3. Вычислительная погрешность (погрешность округлений, погрешность операций,).

Этот тип погрешностей обусловлен необходимостью выполнять арифметические операции над числами, полученными усечением к количеству разрядов, которые связано с используемой вычислительной техникой.

Абсолютная и относительная погрешности

Абсолютной погрешностью приближенного числа a называется величина

$$\Delta = |A - a|$$

A – точное значение некоторой величины,

a - одно из его приближенных значений.

Поскольку точное значение A неизвестно, то пользуются *предельной абсолютной погрешностью.*

$$\Delta = |A - a| \leq \Delta_a$$

Интервал в котором находится A $$a - \Delta_a \leq A \leq a + \Delta_a$$

Основной характеристикой точности приближенного числа является его *относительная погрешность*

$$\delta = \frac{\Delta}{|A|}$$

Поскольку A неизвестно, то полагают

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|}$$

Погрешности вычислений. Погрешности округления

Пример 1.1.

Какова точность использования в вычислениях числа π=3,14

Решение.

Точное значение π = 3,1415926…

Тогда относительная погрешность

$$\Delta \pi = |3.1415926 — 3.14|=0.0015926\approx 0.0016.$$

Относительная погрешность

$$\delta a = 0.0016/3.14 = 0.00051.$$

Относительная погрешность числа связана с его количеством верных знаков. **Количество верных знаков** – отсчитывается от первой значащей цифры числа до первой значащей цифры его абсолютной погрешности, например

3.1415196
0.0016

Представление числа π содержит 3 верных знака.

Пример 1.2.
Приложенное напряжение и ток через резистор составили 100В и 10А
с точностью до 0,5 ед.
Оценить погрешность в вычислении сопротивления резистора
R = U/I = 100/10 = 10 Ом.

Решение.
По условиям задачи $\Delta U = 0.5$В и $\Delta I = 0.5$А.
Крайние возможные значения сопротивления:

(100+0.5)/(10-0.5)=10,578947 Ом
(100-0.5)/(10+0.5)=9.47619 Ом

Сравнивая их с действительным значением сопротивления получим
ΔR = 0.578947=0.58 Ом

Относительная погрешность вычисления сопротивления
$\delta R = 0.58/10 = 0.058 = 6\%$
Количество верных знаков в вычисленном значении сопротивления - 1
10.000
0.58

В окончательных результатах вычислений обычно оставляют, кроме верных, еще один сомнительный знак.

В промежуточных вычислениях следует сохранять 2-3 сомнительных знака, чтобы не накапливались погрешности округлений.

Погрешности вычислений

При вычислениях над приближенными числами погрешность результата зависит от порядка вычислений

Пример 2.1.
Вычислить выражение (1x6)/6 с точностью до двух знаков после запятой.

Решение.

1,00x6,00=6,00
6,00/6,00=1,00

Поскольку (1x6)/6=(1/6)x6, то
1,00/6,00=0,17
0,17x6,00=1,02

В некоторых задачах алгоритм вычислений может оказаться неустойчивым к погрешностям округления

Пример 2.1.
Системе уравнений

$$10{,}1x + 9{,}9y = 20{,}0$$
$$9{,}9x + 10{,}1y = 20{,}0$$

Система имеет решение (1;1)

Пусть исходные данные получены с погрешностью 0,5%, Тогда система уравнений будет иметь вид

$$10{,}1x + 9{,}9y = 20{,}1$$
$$9{,}9x + 10{,}1y = 19{,}9$$

а решение будет (1,5; 0,5) и отличается от предыдущего на 50%

Чтобы избежать накопления ошибок, необходимо применять некоторые рекомендации по выбору лучшей последовательности вычислений они есть в Интернете.

Например:

- Выбирать тот алгоритм, который требует меньшего количества вычислений
- Выбирать численный метод, устойчивый к погрешностям округлений
- Избегать вычитания и деления на разность близких по разряду чисел, преобразуя формулу вычислений:

$$(a+b)^2 - a^2 = 2ab + b^2$$

при $a >> b$

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2} - a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{b^2}$$