**Кременчугский национальный университет**
**имени Михаила Остроградского**

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

## Математические методы вычислений на ЭВМ

**А.П. Черный, д.т.н., профессор**
**http:\\saue.kdu.edu.ua**

# ЛЕКЦИЯ 2.

# МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Необходимость в решении СЛАУ появляются при решении большого числа технических задач., например

- расчеты установившихся режимов в электрических схемах в конечном итоге сводятся к составлению и решению СЛАУ;
- решения СЛАУ высоких порядков возникает в процессе реализации алгоритмов решения уравнений в частных производных методами конечных элементов;
- Как вспомогательные процедуры при обработке результатов экспериментальных исследований;
- при нахождении канонических интерполяционных полиномов;
- при решении задач аппроксимации функций с помощью МНК и многие другие

# Прямые методы решения СЛАУ

Прямые методы являются аналитическими, а потому обеспечивают точное решение СЛАУ. К прямым методам относятся выше метод Крамера и метод обратной матрицы, метод Гаусса и др.

Пусть СЛАУ имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

где $x_k$ – неизвестные величины; $a_{ij}$ – заданные элементы расширенной матрицы системы уравнений, $b_i$ - известные числовые коэффициенты.

СЛАУ может быть представлена в виде

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i \;, \qquad i = 1, \cdots, n$$

Или записана в матричной форме

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

где **A** - матрица коэффициентов системы размерности *n x n*; **b** – вектор-столбец свободных членов длиной *n*; **x** – вектор-столбец неизвестных длиной *n*

Если СЛАУ записать в матричной форме:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

то, умножая обе части этого равенства слева на обратную матрицу $\mathbf{A}^{-1}$, получим решение в виде:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

Вычисление элементов обратной матрицы аналитическим образом приводит к необходимости вычисления $n^2$ определителей порядка $n$.

Менее трудоемким является метод Крамера. Значения неизвестных определяются по формуле:

$$x_i = \frac{det A_i}{\det A}$$

Этот метод требует вычисления $n+1$ определителей порядка $n$.

Еще одним примером прямых методов является метод последовательного исключения, или метод Гаусса.

Применение метода Гаусса состоит в следующем.
Первое уравнение системы делим на коэффициент $a_{11}$. Получим следующее уравнение:

$$x_1 + c_{12}x_2 + \cdots c_{1n}x_n = y_1$$

где $c_{1j} = a_{1j}/a_{11}$; $y_1 = b_1/a_{11}$.

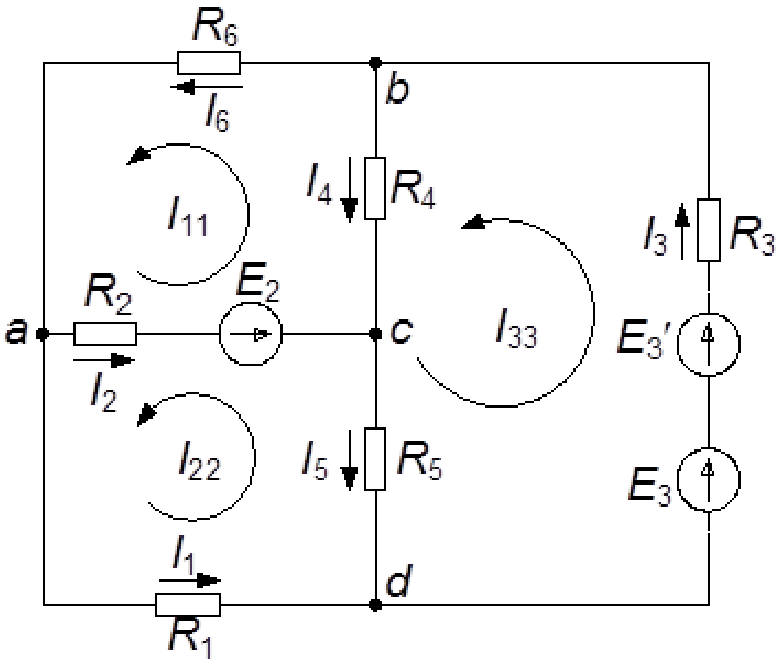
Из этого уравнения несложно выделить переменную $x_1$ и подставить полученное выражение в остальные уравнения системы.
Этот процесс можно последовательно применять к оставшимся *(n-1)* уравнениям исходной системы уравнений.

В итоге такого процесса система уравнений преобразуется к следующему виду:

$$\begin{cases} x_1 + g_{12}x_2 + \cdots g_{1n}x_n = h_1 \\ 0 + g_{22}x_2 + \cdots g_{2n}x_n = h_2 \\ \\ 0 + 0 + \cdots x_n = h_n \end{cases}$$

Последнее уравнение дает нам решение для переменной $x_n$.
Выполняя обратный ход по уравнениям системы, мы последовательно можем вычислить все переменные системы уравнений.

**Пример.** Определение токов в ветвях схемы методом Крамера




Для преобразованной схемы система уравнений для токов будет иметь вид:

$$\begin{cases} 112I_{11} - 70I_{22} - 12I_{33} = 40, \\ -70I_{11} + 114I_{22} - 20I_{33} = -40, \\ -12I_{11} - 20I_{22} + 76I_{33} = 24. \end{cases}$$

Главный определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 112 & -70 & -12 \\ -70 & 114 & -20 \\ -12 & -20 & 76 \end{vmatrix} = (112 \cdot 114 \cdot 76) + (-70) \cdot (-20) \cdot (-12) + (-70) \cdot (-20) \cdot (-12) -$$

$$-(-12) \cdot 114 \cdot (-12) - 112 \cdot (-20) \cdot (-20) - (-70) \cdot (-70) \cdot 76 = 503152.$$

Дополнительные определители системы

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 40 & -70 & -12 \\ -40 & 114 & -20 \\ 24 & -20 & 76 \end{vmatrix} = 174592,$$

$$\Delta_{22} = \begin{vmatrix} 112 & 40 & -12 \\ -70 & -40 & -20 \\ -12 & 24 & 76 \end{vmatrix} = -38400,$$

$$\Delta_{33} = \begin{vmatrix} 112 & -70 & 40 \\ -70 & 114 & -40 \\ -12 & -20 & 24 \end{vmatrix} = 176352.$$

Тогда контурные токи:

$$I_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} = 0,347\,\text{А}; \qquad I_{22} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta} = -0,076\,\text{А}; \qquad I_{33} = \frac{\Delta_{33}}{\Delta} = 0,3505\,\text{А}.$$

**Пример.** Определение токов в ветвях схемы методом Гаусса

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Из первого уравнения находим

$$x_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 + \frac{b_1}{a_{11}}$$

И подставляем во второе уравнение

$$a_{21}\left(-\frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 + \frac{b_1}{a_{11}}\right) + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

Раскрываем скобки и группируем

$$x_2\left(a_{22} - a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}}\right) + x_3\left(a_{23} - a_{21}\frac{a_{13}}{a_{11}}\right) = b_2 - a_{21}\frac{b_1}{a_{11}}$$

Откуда находим $x_2$

$$x_2 = -x_3 \frac{\left(a_{23} - a_{21}\frac{a_{13}}{a_{11}}\right)}{\left(a_{22} - a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}}\right)} + \frac{b_2 - a_{21}\frac{b_1}{a_{11}}}{\left(a_{22} - a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}}\right)}$$

# Итерационные методы решения СЛАУ

Законспектировать самостоятельно