Кременчугский национальный университет
имени Михаила Остроградского

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Математические методы вычислений на ЭВМ

А.П. Черный, д.т.н., профессор
http:\\saue.kdu.edu.ua

ЛЕКЦИЯ 3.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ СИСТЕМ

Численные методы решения нелинейного уравнения с одним неизвестным

Пусть дано уравнение

$$f(x) = 0 \qquad (2.1)$$

где $f(x)$ - алгебраическая или трансцендентная функция с одним неизвестным,

Всякое число x^*, обращающее функцию $f(x)$ в нуль, т.е. при котором

$$f(x^*) \equiv 0,$$

называется корнем уравнения.

В зависимости от вида функции $f(x)$ нелинейные уравнения подразделяются на два класса – *алгебраические* и *трансцендентные*.

Уравнение (2.1) называется *алгебраическим*, если функция $f(x)$ является алгебраической функцией. Например

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 = 0$$

Если функция $f(x)$ содержит тригонометрические, показательные, логарифмические и другие функции, не являющиеся алгебраическими, то уравнение (2.1) называется *трансцендентным*.

$$9 - x^2 - e^x = 0$$

$$\sin(2x) - x^2 + 6 = 0$$

Методы решения нелинейных уравнений делятся на

- *прямые* (аналитические, точные);
- *итерационные*.

Прямые методы – позволяют записать решение в виде некоторого соотношения (формулы). При этом значения корней могут быть вычислены по этой формуле за конечное число арифметических операций. Подобные методы развиты для решения тригонометрических, логарифмических, показательных, а также простейших алгебраических уравнений.

Однако подавляющее большинство нелинейных уравнений, встречающихся на практике, не удается решить прямыми методами. Даже для алгебраического уравнения выше четвертой степени не удается получить аналитического решения в виде формулы с конечным числом арифметических действий. Во всех таких случаях приходится обращаться к численным методам, позволяющим получить приближенные значения корней с любой заданной точностью

При численном подходе задача о решении нелинейных уравнений разбивается на два этапа:

отделение (локализация) корней,

т.е. нахождение таких отрезков на оси *x*, в пределах которых содержится один единственный корень, и

уточнение *корней*,

т.е. вычисление приближенных значений корней с заданной точностью.

Отделение корней

Процесс отделения корней уравнения $f(x) = 0$ основан на первой теореме Больцано-Коши

Первая теорема Больцано-Коши. *Пусть функция* $f(x) = 0$ *определена и непрерывна в замкнутом промежутке* $[a, b]$ *и на концах этого промежутка принимает значения разных знаков*

$$f(a) \cdot f(b) < 0.$$

Тогда между a *и* b *найдется точка* c*, в которой функция обращается в нуль:*

$$f(c) = 0, \qquad (a < c < b).$$

Заметим, что этот корень будет единственным, если производная $f'(x)$ существует и сохраняет постоянный знак внутри интервала $[a, b]$.

Пример 2.1. Отделить корни уравнения $x^3 - 6x + 2 = 0.$ Составим таблицу

x	$-\infty$	-3	-1	0	1	3	$+\infty$
$f(x)$	-	-61	+7	+2	-3	+65	+

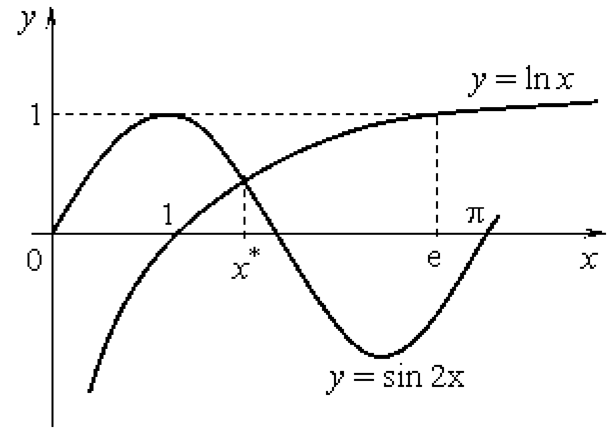
Следовательно, уравнение имеет три действительных корня, лежащих в интервалах [-3, -1], [0, 1] и [1, 3]

Пример 2.2. Графическое отделение корней

Рассмотрим уравнение $sin(2x) - ln(x) = 0$.
Построим графики функций

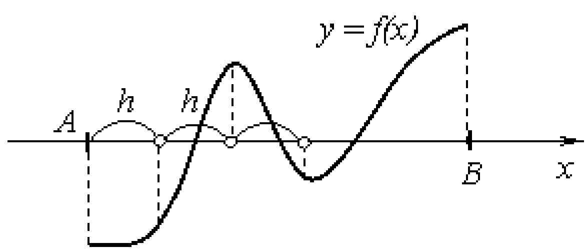
$$y = sin(2x)$$
$$y = ln(x)$$

Из графика видно, что уравнение содержит один корень, расположенный в интервале $[1, \frac{\pi}{2}]$

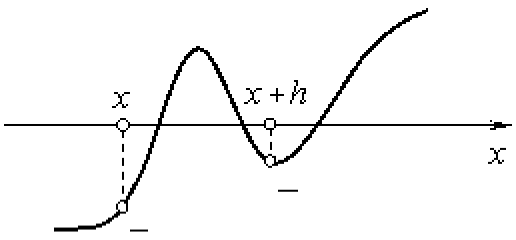


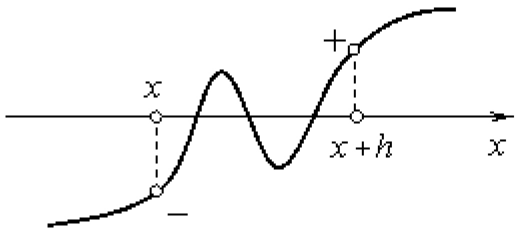
Пример 2.3. Табличное отделение корней

Отделение корней можно также выполнить *табличным* способом. Допустим, что все интересующие нас корни уравнения $f(x) = 0$ находятся на отрезке $[\mathrm{A}, B]$
Выбор этого отрезка (интервала поиска корней) может быть сделан, например, на основе анализа конкретной физической или иной задачи. Будем вычислять значения $f(x)$ начиная с точки $x_1 = A$ двигаясь вправо с некоторым шагом h.
Как только обнаруживается пара соседних значений $f(x)$ имеющих разные знаки, то соответствующие значения аргумента x можно считать границами отрезка, содержащего корень.



Надежность рассмотренного подхода к отделению корней уравнений зависит как от характера функции $f(x)$ так и от выбранной величины шага h.





Предвидя подобные ситуации, следует выбирать достаточно малые значения h.

Уточнение корней

Задача состоит в получении приближенного значения корня, принадлежащего отрезку $[a, b]$, с заданной точностью (погрешностью) ε.

Это означает, что вычисленное значение корня $\tilde{x}$ должно отличаться от точного x^* не более чем на величину ε

$$|x^* - \tilde{x}| \leq \varepsilon.$$

Процедура численного определения приближенных значений корней нелинейных уравнений, как правило, состоит в выборе *начального приближения* к корню $x_0 \in [a, b]$ и вычислении по некоторой формуле последующих приближений $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ (итераций).

Если эти значения с ростом k стремятся к точному значению корня x^*

$$\lim_{k\to\infty}\{x_k\} = x^*$$

то итерационный процесс *сходится*.

Сходимость итерационного процесса означает, что погрешность каждого последующего приближения должна быть меньше погрешности предыдущего приближения, т.е. погрешность приближенных значений с каждым шагом должна уменьшаться:

$$|x^* - x_{k+1}| < |x^* - x_k|.$$

Методы уточнения корней

Постановка задачи.

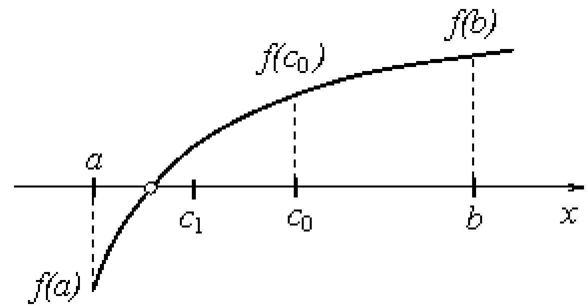
При рассмотрении методов уточнения корней будем полагать, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, на концах его принимает значения разных знаков, $f(a) \cdot f(b) < 0$, и производная $f'(x)$ сохраняет на этом отрезке знак.

Требуется найти приближенное значение корня уравнения $f(x) = 0$, принадлежащего отрезку $[a, b]$ с точностью ε.

Метод половинного деления (бисекции, дихотомии)

В качестве начального приближения корня принимаем середину отрезка $[a, b]$:

$$c_0 = \frac{a+b}{2}.$$



Затем исследуем значение функции $f(x)$ на концах отрезков $[a, c_0]$ и $[c_0, b]$.

Тот из отрезков, на концах которого $f(x)$ принимает значения разных знаков, содержит искомый корень; поэтому его принимаем в качестве нового отрезка $[a_1, b_1]$ (на рис. это отрезок $[a, c_0]$).

Вторую половину отрезка $[a, b]$, на которой $f(x)$ не меняет знак, отбрасываем. В качестве следующего приближения корня принимаем середину нового отрезка

$$c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}.$$

Таким образом, k -е приближение вычисляется как

$$c_k = \frac{a_k+b_k}{2}.$$

Прекратить итерационный процесс следует, когда будет достигнута заданная точность, т.е. при выполнении условия

$$|x^* - c_k| < \varepsilon \text{ или } |b_k - a_k| < 2\varepsilon .$$

Пример 2.4. Методом половинного деления уточнить корень уравнения $f(x) = x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0$, лежащий на интервале [0, 1]

$f(0) = - 1$;

$f(1) = 1$;

$f(0{,}5) = 0{,}06 + 0{,}25 - 0{,}5 - 1 = - 1{,}19$;

$f(0{,}75) = 0{,}32 + 0{,}84 - 0{,}75 - 1 = - 0{,}59$;

$f(0{,}875) = 0{,}59 + 1{,}34 - 0{,}88 - 1 = + 0{,}05$;

$f(0{,}8125) = 0{,}436 + 1{,}072 - 0{,}812 - 1 = - 0{,}304$;

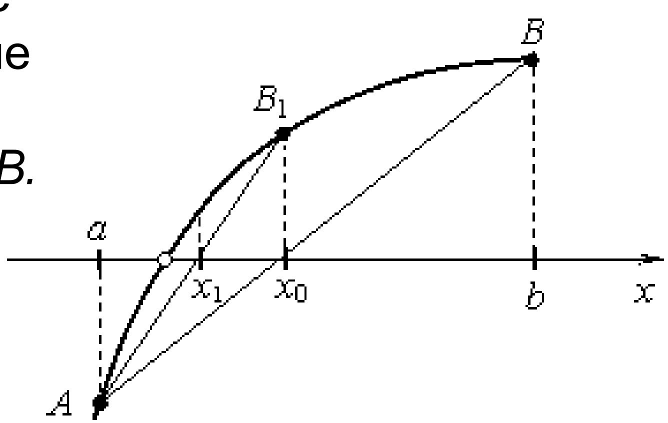
$f(0{,}8438) = 0{,}507 + 1{,}202 - 0{,}844 - 1 = - 0{,}135$;

$f(0{,}8594) = 0{,}546 + 1{,}270 - 0{,}859 - 1 = - 0{,}043$ и т. д.

Можно принять $x = \frac{1}{2}(0{,}859 + 0{,}875) = 0{,}867$

Метод хорд

В качестве начального приближения корня, в отличие от метода половинного деления, берем не в середине отрезка, а в точке , где пересекает ось абсцисс прямая линия (хорда), проведенная через точки *A* и *B*.



Запишем уравнение прямой, проходящей через точки *A* и *B*:

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}$$

Для точки пересечения прямой с осью абсцисс ($x = x_0, y = 0$) получим уравнение

$$x_0 = a - \frac{b - a}{f(b) - f(a)} f(a)$$

В качестве нового интервала для продолжения итерационного процесса выбираем тот из двух $[a, x_0]$ и $[x_0, b]$ на концах которого функция $f(x)$ принимает значения разных знаков.

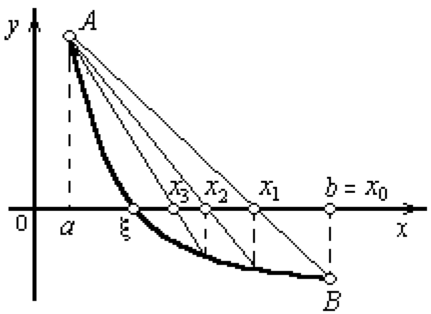
Следующая итерация состоит в определении нового приближения x_1 как точки пересечения хорды AB_1 с осью абсцисс и т.д.

Заканчиваем процесс уточнения корня, когда расстояние между очередными приближениями станет меньше заданной точности, т.е.

$$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$$

При выполнении итерационного процесса важным является выбор неподвижной точки и последовательных приближений.
Например, если $f''(x) > 0$ при $a \le x \le b$ (случай $f''(x) < 0$ сводится к нашему, если записать уравнение в виде $f''(x) < 0$). Тогда кривая $y = f(x)$ будет выпукла вниз и, следовательно, расположена ниже своей хорды *AB*.
Возможны два случая:

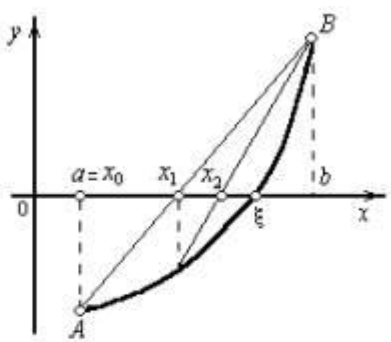
$f(a) > 0$



Тогда конец a неподвижен и последовательные приближения: $x_0 = b$;

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f(x_i) - f(a)}(x_i - a)$$

$f(a) < 0$



Тогда конец b неподвижен и последовательные приближения: $x_0 = a$;

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f(b) - f(x_i)}(b - x_i)$$

Пример 2.5. Найти положительный корень уравнения
$f(x) = x^3 - 0{,}2x^2 - 0{,}2x - 1{,}2 = 0$ с точностью $\varepsilon = 0{,}01$.

Прежде всего, отделяем корень. Так как $f(1) = -0{,}6 < 0$ и $f(2) = 5{,}6 > 0$
То корень лежит в интервале $[1{,}2]$.
Уменьшим интервал методом половинного деления $f(1{,}5) = 1{,}425 > 0$, то
$1 < x < 1{,}5$
Так как $f''(x) = 6x - 0{,}4 > 0$ и $f(1{,}5) > 0$, то воспользуемся формулой

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f(x_i) - f(a)}(x_i - a)$$ для решения поставленной задачи:

$$x_1 = 1 + \frac{0{,}6}{1{,}425 + 0{,}6}(1{,}5 - 1) = 1{,}15 \qquad |x_1 - x_0| = |1{,}15 - 1| = 0{,}15 > \varepsilon$$

следовательно, продолжаем вычисления, $f(x_1) = f(1{,}15) = -0{,}173$;

$$x_2 = 1{,}15 + \frac{0{,}173}{1{,}425 + 0{,}173}(1{,}5 - 1{,}15) = 1{,}190 \qquad |x_2 - x_1| = |1{,}190 - 1{,}15| = 0{,}04 > \varepsilon$$

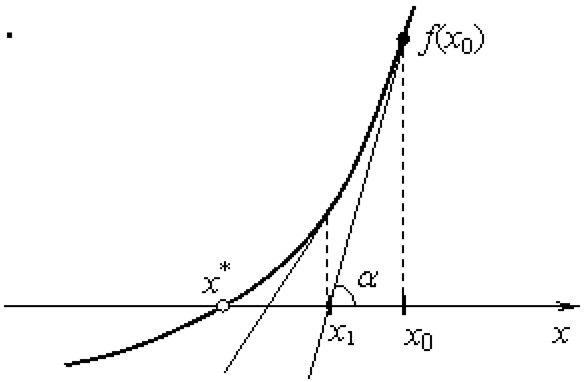
следовательно, продолжаем вычисления, $f(x_2) = f(1{,}190) = -0{,}036$;

$$x_2 = 1{,}190 + \frac{0{,}036}{1{,}425+0{,}036}(1{,}5 - 1{,}190) = 1{,}198 \qquad |x_3 - x_2| = |1{,}198 - 1{,}190| = 0{,}008 < \varepsilon$$

Таким образом, можно принять $x = 1{,}198$ с точностью $\varepsilon = 0{,}01$.
Заметим, что точный корень уравнения $x = 1{,}2$.

Метод Ньютона (метод касательных)

Пусть нам известно начальное приближение к корню x_0. Проведем в этой точке касательную к кривой $y = f(x)$. Эта касательная пересечет ось абсцисс в точке x_1, которую будем рассматривать в качестве следующего приближения. Значение x_1 легко найти из рисунка:



$$tg(\alpha) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} = f'(x_0)$$

Выражая отсюда x_1 получим $$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Аналогично могут быть найдены и следующие приближения. Формула для *k*+1-го приближения имеет вид

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Заканчиваем процесс уточнения корня, когда расстояние между очередными приближениями станет меньше заданной точности, т.е.

$$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$$

Примечание. В качестве исходной точки x_0 выбирается тот конец интервала $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$,которому отвечает ордината того же знака, что и знак $f''(x)$.

$$f(x_0) \cdot f'(x_0) > 0$$

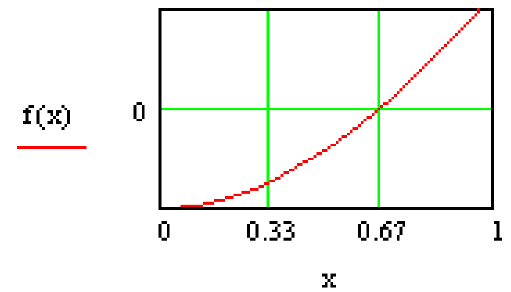
Mathcad Professional - [Метод Ньютона.mcd]

Файл Правка Вид Вставка Формат Математика Символы Окно ?

1. Отделение корней

$f(x) := 2 \cdot x \cdot \sin(x) - \cos(x) \qquad x := 0, 0.1 .. 1$

$x_0 := 0.67$ - начальное приближение, определенное по графику f(x)=0



2. Уточнение корней (методом Ньютона)

$n := 100$ - предположительное число итераций

$i := 1 .. n$

$\varepsilon := 10^{-4}$ - задание точности вычислений

$df(x) := \frac{d}{dx} f(x)$ - определение функции, вычисляющей производную от f(x)

$x_1 := x_0 - \frac{f(x_0)}{df(x_0)}$ - вычисление первого приближения по формуле Ньютона

$x_{i+1} := \mathrm{until}\left(|x_i - x_{i-1}| - \varepsilon, x_i - \frac{f(x_i)}{df(x_i)} \right)$ - реализация итерационного процесса по методу Ньютона с использованием функции **until**

$j := \mathrm{last}(x)$ - определение числа итераций за которые итерационный процесс сошелся

$j = 4$

$x = \begin{pmatrix} 0.67 \\ 0.65342 \\ 0.65327 \\ 0.65327 \\ 0 \end{pmatrix}$ - итерационная последовательность

$x_{j-1} = 0.65327$ - **корень уравнения f(x)**

Метод простых итераций

Рассмотреть самостоятельно и законспектировать

Задачи.

1. Отделить корни уравнения $f(x) = \cos x - \sin x = 0$, на интервале $[0{,}5]$.

2. Найти корень уравнения $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5 = 0$ методом половинного деления с точностью $\varepsilon = 0{,}001$ на интервале $[2{,}3]$.

3. Найти корень уравнения $f(x) = x^3 + x + 3 = 0$ методом хорд с точностью $\varepsilon = 0{,}01$ на интервале $[-2, -1]$.