Кременчугский национальный университет
имени Михаила Остроградского

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Математические методы вычислений на ЭВМ

А.П. Черный, д.т.н., профессор
http:\\saue.kdu.edu.ua

ЛЕКЦИЯ 4

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ

Задача приближения (аппроксимации) заключается в замене функциональной зависимости, заданной на множестве $X \sqsubseteq R$ в виде таблицы, графика, формулы или в неявном виде, более простой приближающей функцией.

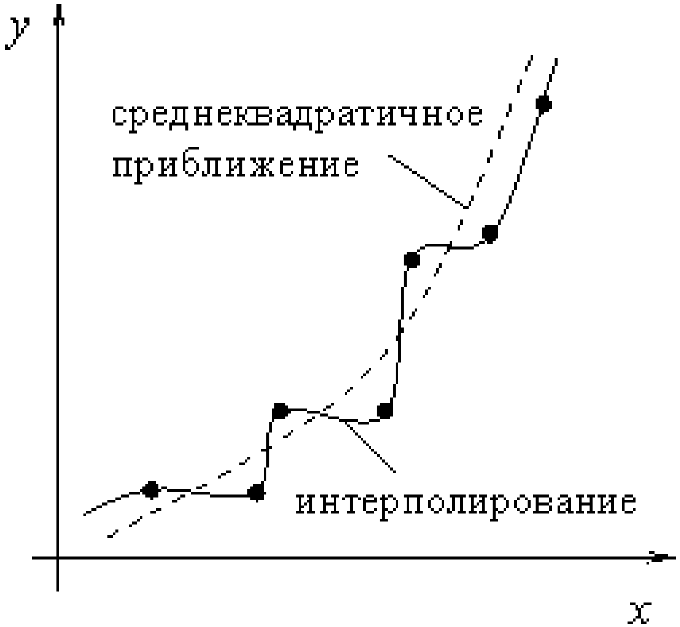
Т.е. некая функция $f(x)$ аппроксимируется на множестве X другой функцией $\varphi(x)$, которая более удобна для вычислений и близка в некотором смысле к $f(x)$.

Если X состоит из дискретного множества точек $x_0, x_1, \dots, x_n$ то приближение называется *точечным*, а если это отрезок $[a, b]$, то приближение называют *непрерывным* или *интегральным*.

При решении задач обработки результатов экспериментов, диагностики параметров или идентификации состояния объектов по измеренным параметрам состояний его координат, в основном используют точечные приближения.

Одним из видов точечной аппроксимации является *интерполирование*, при котором аппроксимирующая функция принимает в заданных точках x_i, те же значения y_i, что и функция $f(x)$, т.е.

$$\varphi(x_i) = y_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, n$$



В этом случае, близость интерполирующей функции к заданной функции состоит в том, что их значения совпадают на заданной системе точек.

Для получения точечного среднеквадратичного приближения функции $y = f(x)$, заданной таблично, аппроксимирующую функцию $\varphi(x)$ строят из условия минимума величины

$$S = \sum_{i=0}^{n} [y_i - \varphi(x_i)]^2$$

где y_i - значения функции $f(x)$ в точках x_i.

На рисунке показаны качественные графики интерполяционной функции (сплошная линия) и результаты среднеквадратичного приближения (пунктирная линия). Точками отмечены табличные значения функции $f(x)$

Интерполирование

Если значения функции $f(x)$ заданы в $n+1$ точках $x_0, x_1, \dots, x_n$ отрезка $[a,b]$ и достаточно простая для вычислений приближающая ее функция $\varphi(x)$ совпадает с $f(x)$ в этих точках, а в остальных точках отрезка $[a,b]$ приближенно представляет $f(x)$, то такое приближение называют *интерполяцией.*

Постановка задачи интерполяции.
Пусть на отрезке $[x_0, x_n]$ заданы таблично точки $x_0, x_1, \dots, x_n$ (узлы интерполяции) и известны значения функции y $= f(x)$ в этих точках: $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, …, $y_n = f(x_n)$.

x	x_0	x_1	…	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	…	y_n

Требуется построить функцию $\varphi(x)$, совпадающую в узлах интерполяции со значениями функции $f(x)$.

Таблица значений функции $f(x)$ может быть интерполирована бесконечным множеством различных кривых, каждая из которых будет графиком функции, для которой выполнены все условия интерполяции.

Для практики важен случай аппроксимации функции многочленами

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_m x^m$$

Все методы интерполяции можно разделить на **локальные** и **глобальные**. В случае *локальной интерполяции* на каждом интервале $[x_{i-1}, x_i]$ строится отдельный полином. В случае *глобальной интерполяции* отыскивается единый полином на всем интервале $[a, b]$. При этом искомый полином называется **интерполяционным полиномом**.

Локальная интерполяция:

- Кусочно–постоянная интерполяция
- Кусочно–линейная интерполяция
- Сплайн-интерполяция (квадратическе, кубические сплайны и др.)

Глобальная интерполяция

- Степенным многочленом (полиномом)
- Полиномом Лагранжа
- Полиномом Ньютона
- Полиномом Эрмита
- Тригонометрическими полиномами и др.

ЛОКАЛЬНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Кусочно–постоянная интерполяция (метод ближайшего соседа)

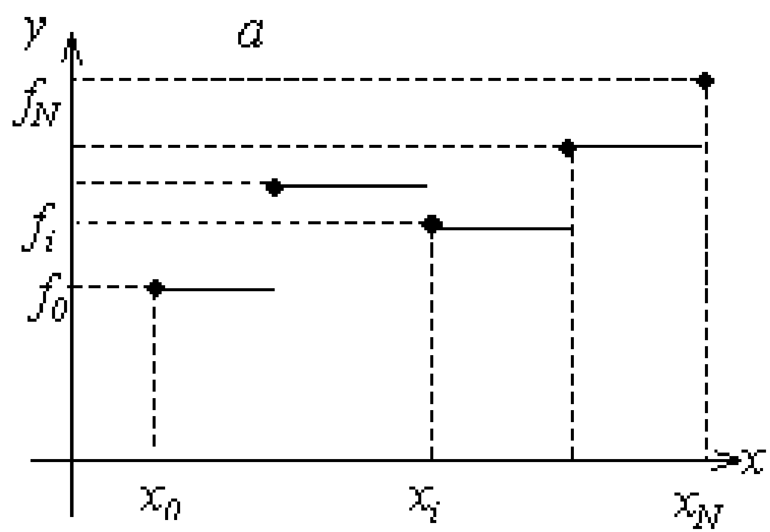
На каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ интерполяционный многочлен равен константе, а именно левому или правому значению функции.

Для левой кусочно-линейной интерполяции

$\varphi(x) = f(x_{i-1})$, если $x_{i-1} \le x < x_i$

Для правой кусочно-линейной интерполяции

$\varphi(x) = f(x_i)$, если $x_{i-1} < x \le x_i$



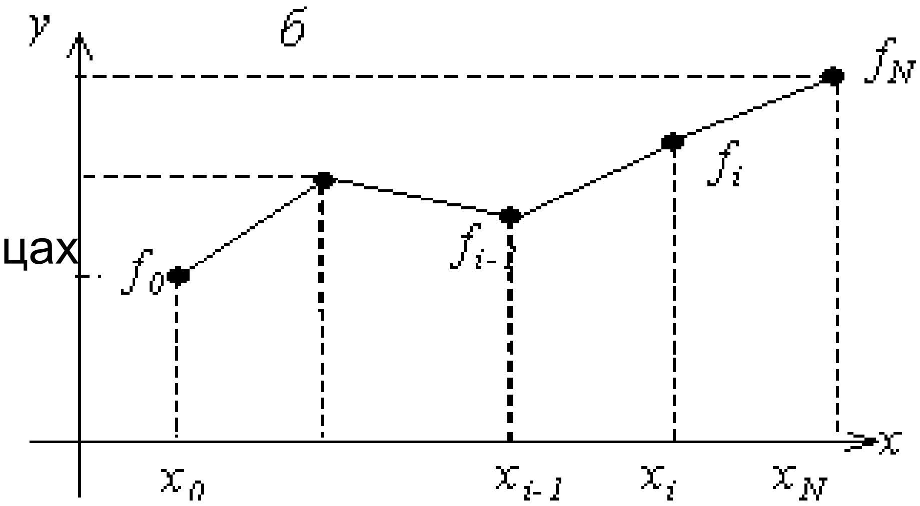
Легко понять, что условия интерполяция выполняются.
Построенная функция является разрывной, что ограничивает ее применение.
Для левой кусочно-линейной интерполяции имеем графическое представление

Кусочно–линейная интерполяция

На каждом интервале $[x_{i-1}, x_i]$ функция является линейной

$$\varphi_i(x) = k_i x + l_i$$

Значения коэффициентов находятся из выполнения условий интерполяции в концах отрезка



$$\varphi(x_{i-1}) = f(x_{i-1}),\ \varphi(x_i) = f(x_i)$$

Получаем систему уравнений

$$k_i x_{i-1} + l_i = f(x_{i-1})$$
$$k_i x_i + l_i = f(x_i)$$

Откуда находим

$$k_i = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \qquad l_i = f(x_i) - k_i x_i$$

Следовательно, функцию $\varphi(x)$ можно записать в виде

$$\varphi(x) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x - x_i) + f(x_i) \qquad x_{i-1} \le x \le x_i \qquad i = 1, 2, \dots, n-1$$

При линейной интерполяции сначала нужно определить интервал, в который попадает значение x, а затем подставить его в формулу.
Итоговая функция будет непрерывной, но производная будет разрывной в каждом узле интерполяции. Погрешность такой интерполяции меньше, чем в случае кусочно–постоянной интерполяции.

Пример 3.1. Задана таблица значений некоторой функции:

x	**0**	**2**	**3**	**3,5**
$f(x)$	-1	$0{,}2$	**0,5**	$0{,}8$

Требуется найти значение функции при $\mathrm{x} = 1$, $x = 3{,}2$ методами
1. кусочно непрерывной интерполяции;
2. кусочно-линейной интерполяции.

Решение 1.

Точка $\mathrm{x} = 1$ принадлежит первому локальному отрезку $[0; 2]$, т.е. $i = 1$ и следовательно:
по формулам левой кусочно–постоянной интерполяции $\varphi(1) = f(0) = -1$
по формулам правой кусочно–постоянной интерполяции $\varphi(1) = f(2) = 0{,}2$

Точка x =3,2 принадлежит третьему локальному отрезку $[3; 3{,}5]$, т.е. $i = 3$ и следовательно:
по формулам левой кусочно–постоянной интерполяции $\varphi(3{,}2) = f(3) = 0{,}5$
по формулам правой кусочно–постоянной интерполяции $\varphi(3{,}2) = f(3{,}5) = 0{,}8$

x	**0**	**2**	**3**	**3, 5**
$f(x)$	-1	0,2	0,5	0,8

$$\varphi(x) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x - x_i) + f(x_i)$$

Решение 2.

Воспользуемся формулами кусочно–линейной интерполяции: для отрезка $[0; 2]$

$$\varphi(1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_1) + f(x_1) = \frac{0{,}2 - (-1)}{2 - 0}(1 - 2) + 0{,}2 = -0{,}4$$

Воспользуемся формулами кусочно–линейной интерполяции: для отрезка $[3; 3{,}5]$

$$\varphi(3{,}2) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}(x - x_3) + f(x_3) = \frac{0{,}8 - 0{,}5}{3{,}5 - 3}(3{,}2 - 3.5) + 0{,}8 = 0{,}62$$

Кусочно–квадратичная интерполяция

Если рассмотреть интервал, содержащий три узловых точки, например, x_{i-1}, x_i, x_{i+1} то аналогично можно построить интерполяционный полином второй степени, т.е. параболу
(для случая равноотстоящих узлов $x_i - x_{i-1} = h = const$)

$$\varphi(x) = f(x_{i-1}) + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}) + \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1})(x - x_i)$$

или

$$\varphi(x) = f(x_{i-1}) + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}(x - x_{i-1}) + \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h}(x - x_{i-1})(x - x_i)$$

ГЛОБАЛЬНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Интерполяция степенным многочленом (полиномом)

Выберем в качестве аппроксимирующей функции $\varphi(x)$ полином[1] степени n в каноническом виде

$$\varphi(x) = P_n(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n$$

Коэффициенты полинома c_i определяются из условий Лагранжа $P_n(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \dots, n$, что дает систему уравнений с $n + 1$ неизвестными:

$$\begin{gathered} c_0 + c_1 x_0 + c_2 {x_0}^2 + \dots + c_n {x_0}^n = y_0 \\ c_0 + c_1 x_1 + c_2 {x_1}^2 + \dots + c_n {x_1}^n = y_1 \\ \dots \\ c_0 + c_1 x_n + c_2 {x_n}^2 + \dots + c_n {x_n}^n = y_n \end{gathered}$$

Систему уравнений можно кратко записать следующим образом

$$\sum_{k=0}^{n} c_k {x_i}^k = y_i \qquad i = 0.1, \dots, n$$

---

1 - Например, через две точки на плоскости можно провести только одну единственную прямую, т.е. полином первой степени, через три точки – параболу – полином второй степени, через $n + 1$ точек на плоскости можно провести кривую, являющуюся графиком степенного многочлена (полинома) степени n, причем такой полином единственный.

или в матричной форме

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{y}$$ откуда

где $\boldsymbol{c}$ - вектор -столбец, содержащий неизвестные коэффициенты c_i, $\boldsymbol{y}$ - вектор-столбец, составленный из табличных значений функции y_i, а матрица $\boldsymbol{A}$ имеет вид

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & {x_0}^2 & \dots & {x_0}^n \\ 1 & x_1 & {x_1}^2 & \dots & {x_1}^n \\ & & \dots & & \\ 1 & x_n & {x_n}^2 & \dots & {x_n}^n \end{bmatrix}$$

Система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных c_i будет иметь решение, если определитель системы отличен от нуля. Определитель матрицы $\boldsymbol{A}$ известный как *определитель Вандермонда*, имеет аналитическое выражение:

$$det\,\boldsymbol{A} = \sum_{\substack{i,j=0 \\ (i \neq j)}}^{n} (x_i - x_j) \neq 0$$

Из этого выражения видно, что $det\,\boldsymbol{A} \neq 0$, если среди узлов x_i нет совпадающих

Формально решение может быть записано в матричном виде: $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{y}$

где $\boldsymbol{A}^{-1}$ - обратная матрица

Интерполяционный полином Лагранжа

В отличии от интерполяционного полинома в канонической форме для вычисления значений полинома Лагранжа не требуется предварительно определять коэффициенты полинома путем решения СЛАУ.

Лагранж предложил строить интерполяционный полином в виде разложения

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \cdots + y_n l_n(x)$$

где $l_i(x)$ базисные полиномы *N*–й степени:

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}$$

Например, легко увидеть, что

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)}$$

$$l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_n)}$$

Рассмотрим частные случаи.

Пример 3.2. Пусть N=1, т.е. заданы значения функции только в двух точках. Тогда базовые полиномы имеют вид:

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)}$$

$$l_1(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

тогда интерполяционный полином запишем как

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{1} y_i l_i(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) = y_0 \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1 \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

или

$$L_n(x) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x + y_1 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Полученное выражение соответствует формуле кусочно–линейной интерполяции.

Пример 3.3. Пусть N=2. Тогда:

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$l_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_2)}$$

тогда интерполяционный полином запишем как

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{2} y_i l_i(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x)$$

$$L_n(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_2)}$$

Полученное выражение соответствует формуле так называемой **квадратичной или параболической интерполяции**

Пример 3.4. Заданы значений некоторой функции:
Требуется найти значение функции при $x = 1$, используя интерполяционный полином Лагранжа.

Для этого случая n= 3, т.е. полином Лагранжа имеет третий порядок.
Вычислим значения базисных полиномов при $x = 1$:

x	**0**	**2**	**3**	**3, 5**
$f(x)$	-1	0,2	0,5	0,8

$$l_0(1) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} = \frac{(1 - 2)(1 - 3)(1 - 3{,}5)}{(0 - 2)(0 - 3)(0 - 3{,}5)} = \frac{-5}{-21} = 0{,}238$$

$$l_1(1) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} = \frac{(1 - 0)(1 - 3)(1 - 3{,}5)}{(2 - 0)(2 - 3)(2 - 3{,}5)} = \frac{5}{3} = 1{,}667$$

$$l_2(1) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} = \frac{(1 - 0)(1 - 2)(1 - 3{,}5)}{(3 - 0)(3 - 2)(3 - 3{,}5)} = \frac{2.5}{-1{,}5} = -1{,}667$$

$$l_3(1) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = \frac{(1 - 0)(1 - 2)(1 - 3)}{(3{,}5 - 0)(3{,}5 - 2)(3{,}5 - 3)} = \frac{2}{2{,}625} = 0{,}762$$

$$L_n(1) = \sum_{i=0}^{3} f(x_i) l_i(x) = (-1) \cdot 0{,}238 + 0{,}2 \cdot 1{,}667 + 0{,}5 \cdot (-1{,}667) + 0{,}8 \cdot 0{,}762 = -0{,}129$$

В отличии от интерполяционного полинома в канонической форме для вычисления значений полинома Лагранжа не требуется предварительно определять коэффициенты полинома путем решения системы уравнений.

Однако для каждого значения аргумента x полином Лагранжа приходится пересчитывать вновь, коэффициенты же канонического полинома вычисляются только один раз.

Поэтому практическое применение полинома Лагранжа оправдано только в том случае, когда интерполяционная функция вычисляется в сравнительно небольшом количестве точек x.

Интерполяционный полином Ньютона

Рассмотрим еще одну форму записи интерполяционного полинома

$$N_n(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + A_n(x - x_0)(x - x_1) \times \cdots \times (x - x_{n-1})$$

Требования совпадения значений полинома с заданными значения функции в узловых точках $N_n(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, \dots, n$ приводит к системе линейных уравнений с треугольной матрицей для неизвестных коэффициентов $\{A, i = 0, 1, \dots, n\}$

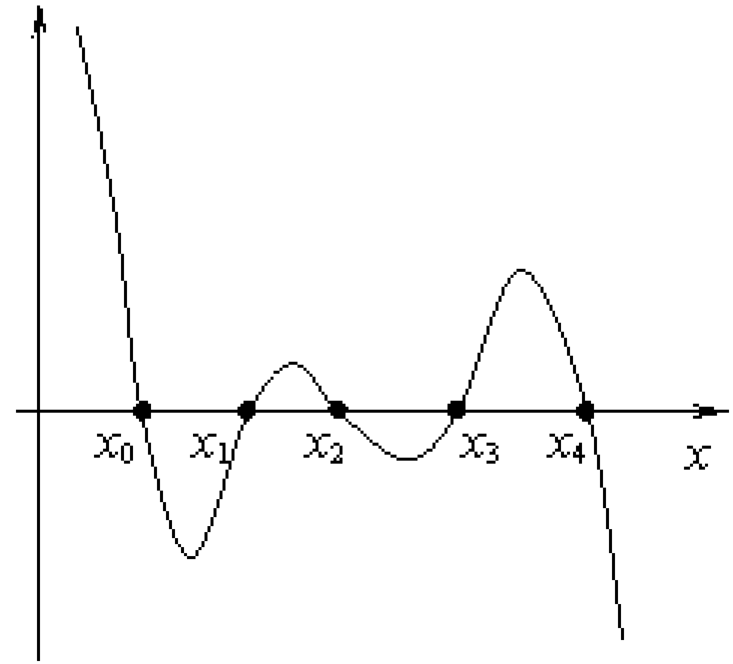
$$\begin{cases} A_0 = y_0 \\ A_0 + A_1(x_1 - x_0) = y_1 \\ A_0 + A_1(x_2 - x_0) + A_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2 \\ \qquad\qquad \dots\dots\dots \end{cases}$$

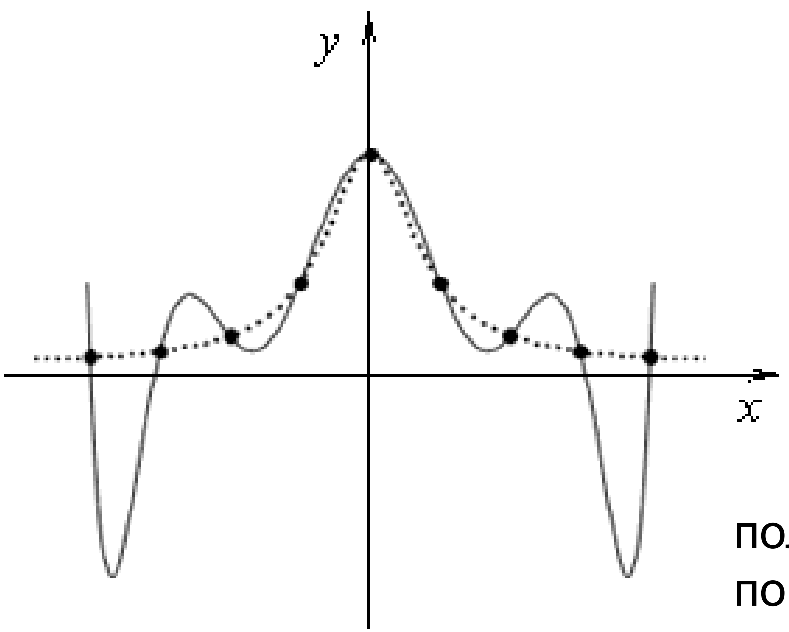
решение которой не составляет труда.

Интерполяционный полином, записанный в форме $N_n(x)$, называется *полиномом Ньютона*.

Погрешность глобальной интерполяции

Погрешность полиномиальной интерполяции тем выше, чем ближе точка *x* лежит к концам отрезка $[x_0, x_n]$. За пределами отрезка интерполяции (т.е. при *экстраполяции*) погрешность возрастает существенно.





В качестве примера рассмотрим результаты интерполяции функции

$$y = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

полиномом 8-й степени. Пунктирной линией показан график исходной функции, сплошная линия показывает график интерполяционного полинома, построенного по заданным точкам.

Среднеквадратичное приближение

В некоторых случаях построение аппроксимирующей функции методами интерполяции оказывается совершенно нецелесообразным. Например, если речь идет об обработке экспериментальных данных, полученных в результате наблюдений или измерений. экспериментальные данные всегда содержат в себе ошибки различного рода:

- Систематические ошибки, как правило, дают отклонения в одну сторону от истинного значения измеряемой величины. Они могут быть постоянными или закономерно изменяться при повторении опыта, и их причины и характер известны. Систематические ошибки могут быть вызваны условиями эксперимента, дефектом измерительного прибора, его плохой градуировкой.

- Случайные ошибки определяются большим числом факторов, которые не могут быть устранены или в полной мере учтены при измерении или при обработке результатов. Они имеют случайных, несистематический характер, дают отклонения от истинного значения в ту и другую стороны при повторении измерений.

- Грубые ошибки сильно искажаю результат измерений и по величине могут существенно превосходить систематические и случайные ошибки.

Экспериментальные данные неизбежно содержат случайные ошибки. Теоретически, случайная ошибка может быть уменьшена до сколь угодно малой величины путем проведения многократных измерений. Однако более эффективным способом избавления от случайных ошибок является подход, позволяющий получить уточненные данные надлежащей математической обработкой имеющихся результатов измерений.

Один из распространенных способов математической обработки экспериментальных данных состоит в определении вида и параметров функциональной связи между исследуемыми величинами на основании результатов измерений.

Пусть, в ходе эксперимента по изучению зависимости между величинами y и x путем измерений была получена таблица значений:

x	x_0	x_1	…	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	…	y_n

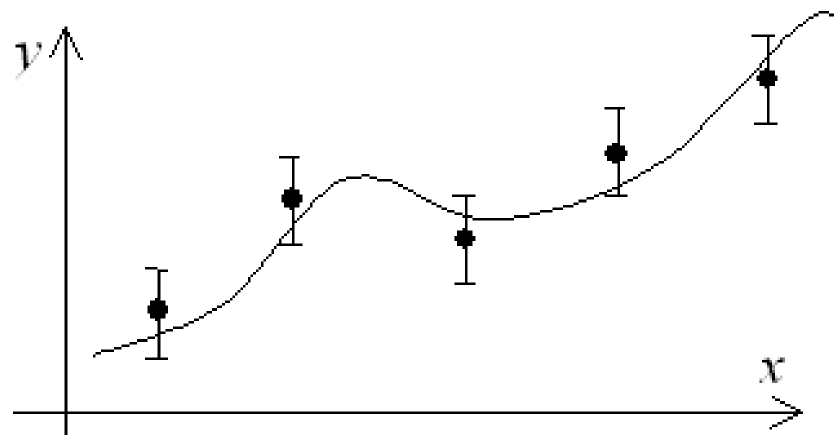
Задача состоит в том, чтобы найти формулу

$$y = f(x)$$

приближенно выражающую эту зависимость. Приближенная зависимость полученная на основании экспериментальных данных, называется *эмпирической формулой*.

Если при интерполировании функций мы использовали условие равенства значений интерполяционного полинома и данной функции в узлах интерполяции то в данном случае требование точного совпадения не нужно, так как данные не получены точно. В этих случаях можно требовать лишь приближенного выполнения условий интерполяции

$$|\varphi(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon$$



Это условие означает, что интерполирующая функция $\varphi = f(x)$ проходит не точно через заданные точки, а в некоторой их окрестности

Построение эмпирической формулы состоит из двух этапов:

1. подбора вида формулы $\varphi = f(x, a_0, a_0, a_1, \dots, a_m)$, содержащей неизвестные параметры $a_0, a_0, a_1, \dots, a_m$
2. определение наилучших, в некотором смысле, параметров формулы

Вид формулы иногда известен из физических соображений или выбираются из геометрических соображений: экспериментальные точки наносятся на график и примерно угадывается общий вид зависимости путем сравнения полученной кривой с графиками известных функций.

Определение параметров эмпирической формулы. Метод наименьших квадратов (МНК)

Пусть для исходных данных $x_i, f_i,\ i = 1, 2, \dots, N$ выбран вид эмпирической зависимости:

$$y = \varphi(x, a_0, a_1, \dots, a_m)$$

с неизвестными коэффициентами $a_0, a_1, \dots, a_m$

Запишем сумму квадратов отклонений между вычисленными по эмпирической формуле и заданными опытными данными:

$$S(a_0, a_1, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^{N} (\varphi(x_i, a_0, a_1, \dots, a_m) - f_i)^2$$

Параметры $a_0, a_1, \dots, a_m$ будем находить из условия минимума функции $S(a_0, a_1, \dots, a_m)$. В этом состоит **метод наименьших квадратов (МНК)**

Таким образом, неизвестные параметры $a_0, a_1, \dots, a_m$ будем определять зная, что в точке минимума все частные производные от S по $a_0, a_1, \dots, a_m$ равны нулю:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0, \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0, \dots, \frac{\partial S}{\partial a_m} = 0$$

Метод наименьших квадратов не является единственным способом минимизации отклонений. Существуют и другие способы решения этой задачи, в частности, *метод выбранных точек* и *метод средних,* (например *Турчак Л.И., Плотников П.В.* Основы численных методов. 2-е издание. –М.: Физматлит, 2002.)

Рассмотрим применение МНК для частного случая, широко используемого на практике. В качестве эмпирической функции рассмотрим полином

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_m x^m$$

Формула для определения суммы квадратов отклонений примет вид:

$$S(a_0, a_1, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^{N} (a_0 + a_1 x_i + a_2 {x_i}^2 + \cdots + a_m\, {x_i}^m - f_i)^2$$

Вычислим производные:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 2 \sum_{i=1}^{N} (a_0 + a_1 x_i + a_2 {x_i}^2 + \cdots + a_m\, {x_i}^m - f_i)^2$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 2 \sum_{i=1}^{N} (a_0 + a_1 x_i + a_2 {x_i}^2 + \cdots + a_m\, {x_i}^m - f_i)^2 x_i$$

...

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 2 \sum_{i=1}^{N} (a_0 + a_1 x_i + a_2 {x_i}^2 + \cdots + a_m\, {x_i}^m - f_i)^2 {x_i}^m$$

Приравнивая эти выражения нулю и собирая коэффициенты при неизвестных $a_0, a_1, \dots, a_m$, получим следующую систему линейных уравнений:

$$Na_0 + a_1 \sum_{i=1}^{N} x_i + a_2 \sum_{i=1}^{N} {x_i}^2 + \dots + a_m \sum_{i=1}^{N} {x_i}^m = \sum_{i=1}^{N} f_i$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{N} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{N} {x_i}^2 + a_2 \sum_{i=1}^{N} {x_i}^3 + \dots + a_m \sum_{i=1}^{N} {x_i}^{m+1} = \sum_{i=1}^{N} x_i f_i$$

$$\dots$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{N} {x_i}^m + a_1 \sum_{i=1}^{N} {x_i}^{m+1} + a_2 \sum_{i=1}^{N} {x_i}^{m+2} + \dots + a_m \sum_{i=1}^{N} {x_i}^{2m} = \sum_{i=1}^{N} {x_i}^m f_i$$

Данная система уравнений называется **нормальной.** Решая эту систему линейных уравнений, получаем коэффициенты $a_0, a_1, \dots, a_m$

Рассмотрим примеры.

В случае полинома первого порядка $m = 1$, аппроксимирующая эмпирическая зависимость имеет вид $\varphi(x) = a_0 + a_1 x$

Система нормальных уравнений будет иметь простой вид

$$\sum_{i=1}^{N}(a_0 + a_1 x_i - y_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N}(a_0 + a_1 x_i - y_i)x_i = 0$$

или

$$Na_0 + a_1 \sum_{i=1}^{N} x_i = \sum_{i=1}^{N} f_i$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{N} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{N} {x_i}^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i f_i$$

В случае полинома второго порядка $m = 2$, $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, тогда

$$Na_0 + a_1 \sum_{i=1}^{N} x_i + a_2 \sum_{i=1}^{N} {x_i}^2 = \sum_{i=1}^{N} f_i$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{N} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{N} {x_i}^2 + a_2 \sum_{i=1}^{N} {x_i}^3 = \sum_{i=1}^{N} x_i f_i$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{N} {x_i}^2 + a_1 \sum_{i=1}^{N} {x_i}^3 + a_2 \sum_{i=1}^{N} {x_i}^4 = \sum_{i=1}^{N} {x_i}^2 f_i$$

Пример 3.4. Заданы координаты точек:

x	-5	-3,5	-2	1,5	3,25	5
$f(x)$	0,5	1,2	1,4	1,6	1,7	1,5

Требуется найти эмпирические зависимости: линейную $\varphi(x) = a_0 + a_1 x$, квадратичную $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, гиперболическую $\varphi(x) = a_0 + \dfrac{a_1}{x}$ по методу МНК и выбрать среди них наилучшую по наименьшей сумме квадратов отклонений.

Система нормальных уравнений для линейной зависимости:

$$N a_0 + a_1 \sum_{i=1}^{N} x_i = \sum_{i=1}^{N} f_i$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{N} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{N} {x_i}^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i f_i$$

Учитывая, что $N = 6$

$$\sum_{i=1}^{6} x_i = -0{,}75 \qquad \sum_{i=1}^{6} {x_i}^2 = 79{,}0625 \qquad \sum_{i=1}^{6} f_i = 7{,}9 \qquad \sum_{i=1}^{6} x_i f_i = 5{,}925$$

получим

$$6a_0 + a_1(-0{,}75) = 7{,}9$$
$$a_0(-0{,}75) + a_1(79{,}0625) = 5{,}925$$

Решая систему линейных уравнений, получим

$$a_0 = 1{,}328$$
$$a_1 = 0{,}0875$$

Следовательно, линейная зависимость имеет вид: $\varphi(x) = 1{,}328 + 0{,}0875x$

Вычислим сумму квадратов отклонений:

$$S = \sum_{i=1}^{6}(a_0 + a_1 x_i - f_i) = 0{,}343$$

Квадратичную и гиперболическую рассмотреть самостоятельно и выбрать наилучшую из трех.

Метод выравнивания (линеаризация данных)

Рассмотреть самостоятельно и законспектировать

Преобразования, сводящие нелинейную регрессию к линейной (ее параметры помечены штрихами)

№	Функция $y\ (x)$	x'	y'	b_0	b_1
1	b_0+b_1x	x	y	b_0'	b_1'
2	$1/(b_0+b_1x)$	x	$1/y$	b_0'	b_1'
3	b_0+b_1/x	$1/x$	y	b_0'	b_1'
4	$x/(b_0+b_1x)$	x	x/y	b_0'	b_0'
5	$b_0b_1^x$	x	$\lg y$	$10b_0'$	$10b_1'$
6	$b_0\exp\ (b_1/x)$	x	$\ln x$	$\exp b_0'$	b_1'
7	$b_0\ 10^{b_1x}$	x	$\lg y$	$10^{b_0'}$	b_1'
8	$1/(b_0+b_1e^{-x})$	e^{-x}	$1/y$	b_0'	b_1'
9	$b_0x^{b_1x}$	$\lg x$	$\lg y$	$10^{b_0'}$	b_1'
10	$b_0+b_1\lg x$	$\lg x$	y	b_0'	b_1'
11	$b_0+b_1\ln x$	$\ln x$	y	b_0'	b_1'
12	$b_0/(b_1+x)$	x	$1/y$	$1/b_1'$	b_0'/b_1'
13	$b_0x/(b_1+x)$	$1/x$	$1/y$	$1/b_1'$	b_0'/b_1'
14	$b_0\exp\ (b_1/x)$	$1/x$	$\ln x$	$\exp b_0'$	b_1'
15	$b_0\ 10^{b_1/x}$	$1/x$	$\lg x$	$10^{b_0'}$	b_1'
16	$b_0+b_1x^n$	x^n	y	b_0'	b_1'

Сглаживание экспериментальных данных

Сглаживание данных эксперимента является специальной операцией усреднения с помощью интерполяционных полиномов, которая обеспечивает получение усредненного значения ${y_i}^*$ по заданному значению y_i и ряду близлежащих значений $(\dots, y_{i-2}, y_{i-1}, y_i, y_{i+1}, y_{i+2}, \dots)$, известных с некоторой погрешностью. При этом используются следующие вычислительные схемы:

линейное сглаживание по трем точкам:

$$ {y_0}^* = \frac{5y_0 + 2y_1 - y_2}{6} $$

$$ {y_i}^* = \frac{y_{i-1} + y_i - y_{i+1}}{3} $$

$$ {y_n}^* = \frac{5y_n + 2y_{n-1} - y_{n-2}}{6} $$

Сущность линейного сглаживания при постоянном шаге сводится к следующему. Выбирают число точек сглаживания N в группе, которое должно быть нечетным и обычно составляет 3 или 5. Средней точке приписывают индекс i, а точкам, симметричным относительно него, индексы $i \mp 1, i \mp 2$. После сглаживания i –й точки, входящей в группу, ее смещают на одну и процесс сглаживания повторяют.

Линейное сглаживание по пяти точкам:

$$y_0{}^* = \frac{3y_0 + 2y_1 + y_2 - y_4}{5}$$

$$y_1{}^* = \frac{4y_0 + 3y_1 + 2y_2 + y_3}{10}$$

$$y_I{}^* = \frac{y_{i-2} + y_{i-1} + y_0 + y_{i+1} + y_{i+2}}{5}$$

$$y_{n-1}{}^* = \frac{y_{n-3} + 2y_{n-2} + 3y_{n-1} + 4y_n}{10}$$

$$y_{n-2}{}^* = \frac{3y_n + 2y_{n-1} + y_{n-2} - y_{n-4}}{5}$$

Задание. Провести линейное сглаживание по 3 и 5 точкам

Точка	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Значение	0,9	2,12	2,92	4,15	4,9	6,1	6,92	8,15	9,05	9,8
y^* по 3 точкам										
y^* по 5 точкам										

Нелинейное сглаживание по семи точкам:

$$y_0{}^* = \frac{39y_0 + 8y_1 - 4(y_2 + y_3 - y_4) + y_5 - 2y_6}{42}$$

$$y_1{}^* = \frac{8y_0 + 19y_1 + 16y_2 + 6y_3 - 4y_4 - 7y_5 + 4y_7}{42}$$

$$y_2{}^* = \frac{-4y_0 + 16y_1 + 19y_2 + 12y_3 + 2y_4 - 4y_5 + y_6}{42}$$

$$y_i{}^* = \frac{7y_i + 6(y_{i+1} - y_{i-1}) + 3(y_{i+2} - y_{i-2}) - 2(y_{i+3} - y_{i-3})}{21}$$

$$y_{n-2}{}^* = \frac{y_{n-6} - 4y_{n-5} + 2y_{n-4} + 12y_{n-3} + 19y_{n-2} + 16y_{n-1} - 4y_n}{42}$$

$$y_{n-1}{}^* = \frac{4y_{n-6} - 7y_{n-5} - 4y_{n-4} + 6y_{n-3} + 16y_{n-2} + 19y_{n-1} + 8y_n}{42}$$

$$y_n{}^* = \frac{-2y_{n-6} + 4y_{n-5} + y_{n-4} - 4y_{n-3} - 4y_{n-2} + 8y_{n-1} + 39y_n}{42}$$

Рассмотреть самостоятельно и законспектировать

Интерполяция кубическими сплайнами
Метод выравнивания (линеаризация данных)

Задачи.

1. Найти значение функции при $x = 1$, используя интерполяционный полином Ньютона.

x	$\mathbf{0}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{3}$	$\mathbf{3,5}$
$f(x)$	-1	$0{,}2$	$0{,}5$	$0{,}8$

2. Провести нелинейное сглаживание по 7 точкам

Точка	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Значение	0,7	1,08	1,39	1,64	1,76	1,99	2,04	2,22	2,28	2,42
y^* по 7 точкам										