

**Кременчугский национальный университет
имени Михаила Остроградского**



МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Математические методы вычислений на ЭВМ

А.П. Черный, д.т.н., профессор
<http://saue.kdu.edu.ua>



ЛЕКЦИЯ 7.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ СИСТЕМ

Дифференциальные уравнения широко используются для математического моделирования процессов и явлений в самых разнообразных областях науки и техники. Движение космических объектов, кинетика химических реакций, динамика биологических популяций в природе, модели экономического развития и т.п., все эти явления исследуются с помощью дифференциальных уравнений.

Любой процесс где происходит изменение одной переменной по отношению к другой переменной, описывается дифференциальным уравнением

В зависимости от числа независимых переменных дифференциальные уравнения делятся на две существенно различные категории:

- *обыкновенные дифференциальные уравнения*, содержащие одну независимую переменную,
- *уравнения в частных производных*, содержащие несколько независимых переменных.

В общем, *обыкновенными дифференциальными уравнениями* (ОДУ) называются такие уравнения, которые содержат одну или несколько производных от искомой функции $y = y(x)$. Их можно записать в виде

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

где x - независимая переменная.

Решением дифференциального уравнения n -го порядка (6.3) называется всякая n раз дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, которая после ее подстановки в уравнение обращает его в тождество. График функции $y = \varphi(x)$ называют *интегральной кривой*.

Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения имеет вид

$$y = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$$

и содержит n произвольных постоянных c_1, c_2, \dots, c_n .

В зависимости от значений c_1, c_2, \dots, c_n , решений ОДУ может быть бесконечное множество.

Единственные (*частные*) решения получают с помощью дополнительных условий, которым должны удовлетворять искомые решения. При этом постоянные c_1, c_2, \dots, c_n получают конкретные значения, определяемые дополнительными условиями.

В зависимости от способа задания дополнительных условий для получения частного решения дифференциального уравнения рассматривают три типа задач:

- задача Коши,
- краевая задача,
- задача на собственные значения.

В качестве дополнительных условий могут задаваться значения искомой функции и ее производных при некоторых значениях независимой переменной, т.е. в некоторых точках. Количество дополнительных условий совпадает с порядком уравнения.

Задача Коши. Если дополнительные условия задаются в одной точке, то такая задача называется *задачей Коши*. Дополнительные условия в задаче Коши называются *начальными условиями*, а точка $x = x_0$, в которой они задаются, – *начальной точкой*.

Начальные условия могут быть заданы следующим образом:

$$y(x_0) = y_0 \qquad y'(x_0) = y_{1,0} \qquad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1,0}$$

Краевая задача. Если дополнительные условия задаются более чем в одной точке, т.е. при разных значения независимой переменной, то такая задача называется *краевой*. Сами дополнительные условия называются при этом *граничными* (или *краевыми*) *условиями*.

На практике, обычно граничные условия задаются в двух точках $x = a$ и $x = b$, являющихся границами отрезка, на котором рассматривается решение дифференциального уравнения. Минимальный порядок ОДУ, для которого может быть сформулирована краевая задача, равен двум.

Задача на собственные значения. Третий тип задач для ОДУ – это *задачи на собственные значения*. Такие задачи отличаются тем, что кроме искомым функций $y(x)$ и их производных в уравнения входят дополнительно x неизвестных параметров $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, которые называются собственными значениями.

При этом для нахождения единственного (частного) решения на интервале $[a, b]$ необходимо задать $n + m$ граничных условий.

В качестве примера можно назвать задачи определения собственных частот, задачи нахождения коэффициентов затухания волновых процессов и т.д.

Методы решения ОДУ

Методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений можно разбить на следующие группы: аналитические, приближенные и численные.

Аналитические методы позволяют получить решение в виде формулы путем аналитических преобразований.

При этом имеется возможность исследовать аналитическим способом свойства общего решения и получать из него частные решения. Такие методы развиты для ряда уравнений первого порядка (с разделяющимися переменными, однородных, линейных), а также для некоторого типа уравнений высших порядков (например, линейных с постоянными коэффициентами).

Приближенные методы основаны на различных упрощениях самих уравнений путем обоснованного отбрасывания (пренебрежения) некоторых содержащихся в них членов.

В некоторых случаях сначала находят точное решение упрощенной задачи, а затем приближенно вычисляют поправки, обусловленные малыми членами, отброшенными на первом этапе. На этом основаны *методы теории возмущений*. Другой подход связан с представлением решения в виде разложения по малому параметру, который содержится в задаче. К данной группе относятся *асимптотические методы*.

Численные методы решения дифференциальных уравнений применяют, когда не удастся получить аналитического решения и применение приближенных методов также оказывается затруднительным.

Например, внешне простое уравнение $y' = x^2 + y^2$ не имеет элементарного аналитического решения и может быть решено только численно.

В настоящее время численные методы являются основным инструментом при исследовании большинства научно-технических задач.

Наиболее распространенным и универсальным подходом к численному решению дифференциальных уравнений является **метод конечных разностей**. Суть этого подхода состоит в следующем. Область непрерывного изменения независимой переменной (аргумента) заменяется дискретным множеством точек, называемых узлами. Эти узлы образуют *расчетную сетку*. Искомая функция непрерывного аргумента приближенно заменяется функцией дискретного аргумента на заданной сетке. Эта функция называется *сеточной*. Исходное дифференциальное уравнение заменяется разностным соотношением относительно сеточной функции. При этом входящие в уравнения производные заменяются разностными отношениями. Такая замена дифференциального уравнения разностным уравнением называется его *аппроксимацией* на сетке. Таким образом, решение дифференциального уравнения сводится к отысканию значений сеточной функции в узлах сетки.

Метод Эйлера (метод ломаных)

Рассмотрим решение дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad a \leq x \leq b$$

$$y(a) = y_a$$

Заменяя в (6.6) производную в окрестности каждого i -го узла сетки правым разностным отношением, приходим к разностной схеме Эйлера:

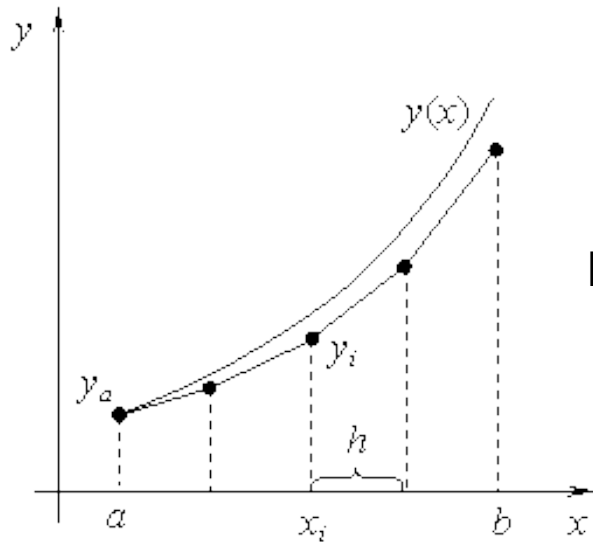
$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i) \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

$$y(0) = y_a$$

Последовательные значения y_i вычисляются по формуле

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

Метод Эйлера имеет очень простую геометрическую интерпретацию. Искомая интегральная кривая $y(x)$ на отрезке $[a, b]$ приближается ломаной, наклон которой на каждом элементарном участке $[x_i, x_{i+1}]$ определяется наклоном интегральной кривой уравнения в точке (x_i, y_i)



Метод Эйлера имеет первый порядок точности $\varepsilon \sim h$

Методы, в которых приближенное решения в очередном i -ом узле явно выражается через предыдущие значения y_{i-1}, y_{i-2}, \dots называются **явными методами**.

В противоположность этому методы, в которых для вычисления приближенного решения в очередном i -ом узле необходимо дополнительно решать некоторые уравнения (линейные или нелинейные) называются **неявными методами**.

При этом, если для вычисления y_i используется только одно предыдущее значение y_{i-1} , то метод называется **одношаговым**, а если несколько предыдущих значений – **многошаговым**.

Таким образом, метод Эйлера является явным одношаговым методом.

Модифицированный метод Эйлера

Запишем уравнение прямой выходящей из точки (x_i, y_i) с наклоном, равным наклону интегральной кривой в середине отрезка $[x_i, x_{i+1}]$. Этой прямой соответствует прямая, проходящая через точки (x_i, y_i) , (x_{i+1}, y_C)

$$y = y_i + f(x_i + h/2, y_{i+1/2})(x - x_i)$$

Для точки $x = x_{i+1}$ получаем

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i + h/2, y_{i+1/2})h$$

откуда следует разностное соотношение:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i + h/2, y_{i+1/2})$$

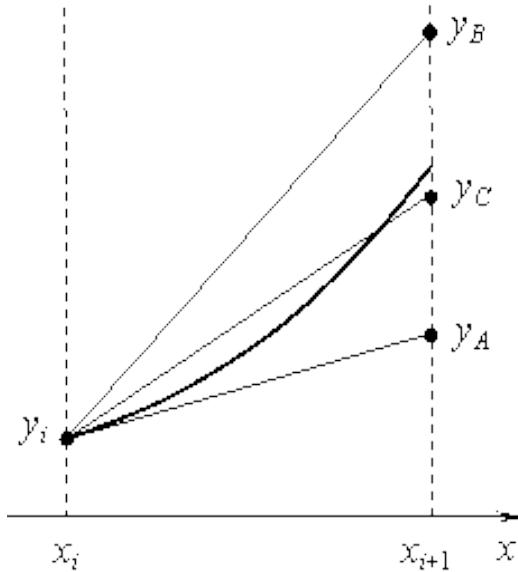
Если значение $y_{i+1/2}$, относящееся к середине отрезка $[x_i, x_{i+1}]$, приближенно вычислить по методу Эйлера

$$y_{i+1/2} \approx y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)$$

то получим одношаговую разностную схему, со вторым порядком точности $\varepsilon \sim h^2$

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)\right) \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

$$y(0) = y_a$$



Методы Рунге-Кутты

Метод Рунге-Кутты позволяет строить схемы различного порядка точности и наиболее применимы в практических вычислениях.

Рассмотрим метод второго порядка, который требует лишь два вычисления функции $f(x, y)$ на каждом шаге.

- 1-е вычисление равно $k_1 = h_i f(x_i, y_i) = h_i f_i$
- 2-е вычисление, осуществляется дробный шаг, использующий k_1

$$k_2 = h_i f(x_i + \alpha h_i, y_i + \beta k_1)$$

Для полного шага берется комбинация значений функции

$$y_{i+1} = y_i + \gamma_1 k_1 + \gamma_2 k_2$$

Неизвестные коэффициенты определяются разложением k_1 и k_2 в окрестности точки (x_i, y_i)

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 1 \quad \gamma_2 \beta = \frac{1}{2} \quad \gamma_2 \alpha = \frac{1}{2}$$

Коэффициент α можно выбрать произвольно положив его равным 1 или 1/2

При α равно $\frac{1}{2}$ получаем вычислительную схему $y_{i+1} = y_i + h_i f\left(x_i + \frac{1}{2} h_i; y_i + \frac{1}{2} h_i f_i\right)$

При α равно 1 $y_{i+1} = y_i + \frac{h_i}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_i + h_i; y_i + h_i f_i)]$

Аналогично строятся вычислительные схемы метода Рунге-Кутты более высоких порядков.

Наиболее широка используется схема четвертого порядка точности.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h_i}{6} [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h_i}{2}; y_i + \frac{h_i}{2} k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{h_i}{2}; y_i + \frac{h_i}{2} k_2\right)$$

$$k_4 = f(x_i + h_i; y_i + h_i k_3)$$

- Метод Рунге-Кутты требует существенно большего объема вычислений по сравнению с методом Эйлера и его модификациями, однако это окупается повышенной точностью, что дает возможность проводить вычисления с бóльшим шагом. Другими словами, для получения результатов с одинаковой точностью в методе Эйлера потребуется значительно меньший шаг, чем в методе Рунге-Кутты.
- Методы Рунге-Кутты легко программируются, они численно устойчивы для широкого класса задач, величину шага можно изменять.
- Методы Рунге-Кутты легко переносятся на решение систем дифференциальных уравнений.

В рассмотренных одношаговых методах численного интегрирования дифференциальных уравнений используют на каждом шаге вычислений информацию о значении искомого решения только в предыдущей точке.

Вычислительные схемы многошаговых методов строятся так, что полученная ранее информация о решении используется повторно на нескольких шагах.

Другими словами вычисляемое значение решения в текущем узле зависит от данных не только в одном предыдущем узле, но и в ряде предшествующих.

Среди многошаговых методов различных порядков широко применяются методы Адамса.

Метод Адамса

Идея методов Адамса заключается в том, что если в нескольких $k + 1$ начальных точках $x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-k}$ найдены приближенные значения $y(x)$: $y_i, y_{i-1}, \dots, y_{i-k}$, то по данным узлам строится интерполяционный полином $P_k(x)$ для функции $f(x, y(x))$.

Считая приближенно, что $y'(x) = P_k(x)$. запишем

$$y_{i+1} \approx y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_k(x) dx$$

Выражая $P_k(x)$ через конечные разности до третьего порядка используя формулу Ньютона для интерполяции назад, получим экстраполяционную формулу Адамса-Башфорта

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} (55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3})$$

Здесь используются значения функции f_i в точках $x_i, x_{i-1}, x_{i-2}, x_{i-3}$, предшествующих отрезку интегрирования.

После вычисления y_{i+1} , определяют $f_{i+1} = f(x_{i+1}, y_{i+1})$, а затем уточняют y_{i+1} по следующей интерполяционной формуле Адамса-Мултона:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} (9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2})$$

Формулы методов Адамса имеют четвертый порядок точности.

Для начала вычислений нужны, кроме y_0 , еще три значения искомого решения y_1, y_2, y_3 . Их можно определить каким-либо одношаговым методом того же порядка, например, методом Рунге-Кутты. Величину шага этого одношагового метода необходимо выбирать меньшей, чем в последующих вычислениях, для достижения большей точности в начальных точках отрезка интегрирования.

Метод Милна

Метод Милна является многошаговым методом четвертого порядка точности типа «предсказание-коррекция». Для его работы необходимо найти каким-либо одношаговым методом четыре значения искомого решения y_0, y_1, y_2, y_3 . Дальнейшие вычисления проводятся по следующей схеме.

1. По четырём предыдущим точкам предсказываем следующее значение y_{i+1} :

$$y_{i+1}^{\text{пред.}} = y_{i-3} + \frac{4}{3}h(2f_i - f_{i-1} + 2f_{i-2})$$

где $f_i = f(x_i, y_i)$; ($i = 3, 4, 5, \dots$)

2. Вычисляем значение правой части уравнения

$$f_{i+1}^{\text{пред.}} = f(x_{i+1}, y_{i+1}^{\text{пред.}})$$

3. Корректируем значение y_{i+1}

$$y_{i+1}^{\text{кор.}} = y_{i-1} + \frac{h}{3}(f_{i-1} + 4f_i + 2f_{i+1}^{\text{пред.}}) \quad (i = 3, 4, 5, \dots)$$

Предельная абсолютная погрешность значения y_i в методе Милна равна

$$\varepsilon = \frac{1}{29} |y_i^{\text{пред.}} - y_i^{\text{кор.}}|$$

Выбор шага интегрирования и контроль за точностью вычислений

Вопрос выбора шага интегрирования является очень важным при решении задачи. От величины шага зависит точность получаемого решения и время, затрачиваемое на его получение. Как правило полагают, что для повышения точности следует брать меньший шаг.

Однако

- уменьшение шага интегрирования приводит к увеличению времени вычислений;
- слишком малые значения шага могут привести не к повышению точности, а, наоборот, к увеличению погрешности в силу накапливания вычислительной ошибки;
- выбор слишком большого шага интегрирования может привести не только к большой погрешности, но и к получению абсолютно неверного результата.

Поэтому выбор шага это всегда определенный компромисс между точностью и временем.

Критерием, по которому можно судить о точности получаемых результатов является сравнение приближенного результата с точным.

Однако, если точный результат неизвестен, то критерием точности может служить сравнение приближенных результатов в каждом узле, полученных при разных шагах интегрирования, например h и $h/2$.

Если величина

$$\frac{y_{i+1}^{(h/2)} - y_{i+1}^{(h)}}{y_{i+1}^{(h/2)}}$$

сравнима с заданной погрешностью вычислений, то шаг можно увеличить; в противном случае, когда указанная величина слишком велика, значение шага следует уменьшить. Используя эту оценку, можно построить методы с автоматическим выбором шага и контролем точности на протяжении всего времени вычислений. Такие алгоритмы называют **адаптивными**, т.е. подстраивающимися под условия конкретной задачи.

Что касается выбора начального (пробного) значения шага, то здесь, к сожалению, не существует универсального рецепта. И в каждом конкретном случае шаг выбирается исходя из характерных параметров решаемой задачи.